高等教育数学课程改革创新系列教材

概率论与数理统计自考
考点分析与训练

主　编　韩兆君　刘　婧　李高尚
副主编　李　奎　孔德斌　郭立娜

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书以“倡导自学，鼓励自学，帮助自学，推动自学”为原则，依据全国高等教育自学考试《概率论与数理统计（经管类）》考试大纲编写。

本书内容包括：随机事件与概率，随机变量及其概率分布，多维随机变量及其概率分布，随机变量的数字特征，大数定律及中心极限定理，统计量及其抽样分布，参数估计，假设检验，回归分析。本书特点是将各章的考核知识点分块总结，由浅入深，同时为方便自学选取了典型例题，每个知识点的后面还配有同步练习和课后练习。另外，本书附有历年真题和参考答案。

本书依据历年真题，考核知识点分题型总结，叙述清楚，习题丰富，针对性强，可作为《概率论与数理统计（经管类）》自考生的辅导教材或自学用书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计自考考点分析与训练 / 韩兆君，刘婧，李高尚主编. —北京：电子工业出版社，2018.1
ISBN 978-7-121-33097-1

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①韩… ②刘… ③李… Ⅲ. ①概率论－成人高等教育－自学参考资料②数理统计－成人高等教育－自学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 287489 号

策划编辑：李　静
责任编辑：朱怀永
文字编辑：李　静
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：787×980　1/16　　印张：14.5　　字数：278.4 千字
版　　次：2018 年 1 月第 1 版
印　　次：2018 年 1 月第 1 次印刷
定　　价：39.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　　言

“概率论与数理统计（经管类）”是高教自考所有科目中最难的课程之一，参加自学考试的学生由于缺乏必要的辅导，在学习与考试中遇到不少困难，甚至很多同学因这一门课程屡试不过而无法毕业。

“概率论与数理统计（经管类）”，除具有数学学科的严密性和逻辑性外，还具有研究方法的特殊性。要学好这门课程必须对该课程的理论知识有深刻的理解，同时还要理论联系实际，做好相应习题。因此，为帮助考生更有效地掌握“概率论与数理统计（经管类）”这门课程，我们精心编写了这本书。

本书的编排从“帮助考生”这一主导思想出发，旨在让广大读者形成自学能力，提高学习效率，顺利通过国家统一考试。在考点分析部分，按章排列，每章内部按照知识点叙述。对每个知识点，由考点内容、典型例题、同步练习与课后练习四部分构成，其中所有例题及练习题都来源于历年真题，代表性强，讲解清晰，步骤详细，便于读者把握知识重点、难点，掌握知识，进行针对性的学习。最后，本书还为广大自考生提供了历年真题和参考答案的详解过程，适合校内外广大读者独立学习，也可作为自学考试的辅导教材和考试用书。

本书是烟台南山学院数理部教师多年的教学经验总结，韩兆君老师主要负责本书的策划和审定，并负责编写第五章至第九章，刘婧老师负责编写第一章至第四章，李高尚老师负责整理历年真题，教研室其余老师协助。

由于时间紧张，本书在编写和整理过程中难免存在疏漏或不足之处，恳请各位读者在使用本书的过程中积极提出修改意见和建议，我们将不胜感激。

祝每一位读者自学成功！

编　　者

2017 年 12 月于烟台南山学院

目　　录

第二部分　历年真题

第三部分　历年真题答案

第一章　随机事件与概率

【考核要求】

掌握随机事件之间的关系与运算；理解概率的定义，掌握概率的基本性质，能用这些性质进行概率的基本计算；理解古典概型的定义，能解决简单的古典概型问题；理解条件概率的概念，能用乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式进行概率计算；理解事件独立性的概念，能用事件独立性进行概率计算。

重点：随机事件的关系与运算，概率的概念、性质；条件概率，事件独立性的概念，乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式。

难点：古典概型的概率计算，全概率公式、贝叶斯公式，事件独立性的概念。

考点 1　概率性质

【考点内容】

1. 随机事件的关系与运算

事件的关系：包含；相等；和；积；差；互不相容；对立。

事件的运算：交换律；结合律；分配律；对偶律。

2. 概率的性质

① $0 \leqslant P(A) \leqslant 1, P(\phi)=0, P(\Omega)=1$。

② 对于任意事件 A，B 有

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

特别地，当 A 与 B 互不相容时

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$$

对于任意事件 A，B，C 有

$$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

当 A_1，A_2，…，A_n 互不相容时，

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

其中，n 为正整数。

③ $P(A-B) = P(A) - P(AB)$。

特别地，当 $B \subset A$ 时，$P(A-B) = P(A) - P(B)$，且 $P(B) \leqslant P(A)$。

④ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$。

【典型例题】

例 1　A，B，C 为三事件，则事件 $\overline{A \cup BC} =$（　　）。

A. $\overline{A}\ \overline{B}C$　　B. $\overline{A}\ \overline{B} \cup C$　　C.（$\overline{A} \cup \overline{B}$）$C$　　D.（$\overline{A} \cup \overline{B}$）$\cup C$

【解】选 A。

例 2　某射手向一目标射击两次，A_i 表示事件“第 i 次射击命中目标”，i=1，2，B 表示事件“仅第一次射击命中目标”，则 B=（　　）。

A. A_1A_2　　B. $A_1\overline{A_2}$　　C. $\overline{A_1}A_2$　　D. $\overline{A_1}\overline{A_2}$

【解】选 B。

例 3　设事件 A 与 B 互不相容，且 $P(A)>0, P(B)>0$，则有（　　）。

A. $P(\overline{AB}) = 1$　　B. $P(A) = 1 - P(B)$

C. $P(AB) = P(A)P(B)$　　D. $P(A \cup B) = 1$

【解】选 A。

例 4　设事件 A 与 B 互不相容，且 $P(A) = 0.4$，$P(A \cup B) = 0.7$，则 $P(\overline{B}) =$ ________。

【解】0.7。

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设 A 为随机事件，则下列命题中错误的是（　　）。

A. A 与 $\overline{A}$ 互为对立事件　　B. A 与 $\overline{A}$ 互不相容

C. $\overline{A \cup \overline{A}} = \Omega$　　D. $\overline{\overline{A}} = A$

2. 设 A，B 为任意两个事件，则有（　　）。

A. $(A \cup B) - B = A$　　B. $(A-B) \cup B = A$

C. $(A \cup B) - B \subset A$　　D. $(A-B) \cup B \subset A$

3. 设 A 与 B 互为对立事件，且 $P(A)>0, P(B)>0$，则下列各式中错误的是（　　）。

A. $P(A)=1-P(B)$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(\overline{AB})=1$　　D. $P(A\cup B)=1$

4. 事件 A，B 满足 $P(A\overline{B})=0.2$，$P(B)=0.6$，则 $P(AB)=$（　　）。

A. 0.12　　B. 0.4　　C. 0.6　　D. 0.8

5. 设 A，B 为两个互不相容事件，则下列各式中错误的是（　　）。

A. $P(AB)=0$　　B. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

C. $P(AB)=P(A)P(B)$　　D. $P(B-A)=P(B)$

二、填空题

1. 设 $P(A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A\cup B)=\dfrac{1}{2}$，且 A 与 B 互不相容，则 $P(B)=$__________。

2. 设 $P(A)=0.3$，$P(B)=P(C)=0.2$，且事件 A，B，C 两两互不相容，则 $P(\overline{A\cup B\cup C})=$__________。

3. 设事件 A 与 B 互不相容，$P(A)=0.2$，$P(B)=0.3$，则 $P(\overline{A\cup B})=$__________。

4. 设 A 与 B 是随机事件，已知 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.6$，$P(A\cup B)=0.7$，则 $P(\overline{A}B)=$_____。

5. 已知事件 A，B 满足：$P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=p$，则 $P(B)=$______。

6. 设随机事件 A 与 B 互不相容，且 $P(A)=0.2$，$P(A\cup B)=0.6$，则 $P(B)=$________。

【参考答案】

一、单项选择题

1.～5. CCBBC

二、填空题

1.～6. $\dfrac{1}{6}$；0.3；0.5；0.3；$1-p$；0.4

【课后练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设 A，B，C 为随机事件，则事件“A，B，C 都不发生”可表示为（　　）。

A. $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$　　B. $\overline{A}BC$　　C. ABC　　D. $\overline{ABC}$

2. 设 A，B 为随机事件，则 $(A-B)\cup B$ 等于（　　）。

A. A　　B. AB　　C. $A\overline{B}$　　D. $A\cup B$

3. 若 A 与 B 互为对立事件，则下式成立的是（　　）。

A. $P(A\cup B)=\Omega$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A)=1-P(B)$　　D. $P(AB)=\phi$

4. 设 A 与 B 是任意两个互不相容事件，则下列结论中正确的是（　　）。

A. $P(A)=1-P(B)$　　B. $P(A-B)=P(B)$

C. $P(AB)=P(A)P(B)$　　D. $P(A-B)=P(A)$

5. 设 A，B 为随机事件，$B\subset A$，则（　　）。

A. $P(B-A)=P(B)-P(A)$　　B. $P(B|A)=P(B)$

C. $P(AB)=P(A)$　　D. $P(A\cup B)=P(A)$

6. 设 A 与 B 互为对立事件，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则下列各式中错误的是（　　）。

A. $P(A\cup B)=1$　　B. $P(A)=1-P(B)$

C. $P(AB)=P(A)P(B)$　　D. $P(A\cup B)=1-P(AB)$

7. 从一批产品中随机抽两次，每次抽 1 件. 以 A 表示事件“两次都抽得正品”，B 表示事件“至少抽得一件次品”，则下列关系式中正确的是（　　）。

A. $A=\overline{B}$　　B. $A=B$　　C. $A\subset B$　　D. $B\subset A$

8. 设 A，B 为随机事件，且 $A\subset B$，则 $\overline{AB}$ 等于（　　）。

A. $\overline{A}\overline{B}$　　B. $\overline{B}$　　C. $\overline{A}$　　D. A

9. 设 A，B 为随机事件，则 $P(A-B)=$（　　）。

A. $P(A)-P(B)$　　B. $P(A)-P(AB)$

C. $P(A)-P(B)+P(AB)$　　D. $P(A)+P(B)-P(AB)$

10. 已知事件 A，B，$A\cup B$ 的概率分别为 0.5，0.4，0.6，则 $P(A\overline{B})=$（　　）。

A. 0.1　　B. 0.2　　C. 0.3　　D. 0.5

二、填空题

1. 设 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，$P(A\cup B)=0.4$，则 $P(A\overline{B})=$______。

2. 设 A，B 为两个随机事件，若 A 发生必然导致 B 发生，且 $P(A)=0.6$，则 $P(AB)=$______。

3. 设 $P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(\overline{AB})=$______。

4. 设 A 为随机事件，$P(A)=0.3$，则 $P(\overline{A})=$______。

5. 已知 $P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(\overline{AB})=$______。

6. 设随机事件 A 与 B 互不相容，$P(\overline{A})=0.6$，$P(A\cup B)=0.8$，则 $P(B)=$______。

【参考答案】

一、单项选择题

1.～5. ADCDD；　6.～10. CACBB

二、填空题

1.～6. 0.1；0.6；0.6；0.7；0.6；0.4

考点 2　概率计算

【考点内容】

1. 古典概型

若随机试验有下面两个特点：

① 试验只有有限个不同的结果；

② 每一个结果出现的可能性相等。

则这种试验模型称为古典概型。

设 Ω 是古典概型的样本空间，其中样本点总数为 n，A 为随机事件，其中所含的样本点数为 r，则有计算公式：

$$P(A)=\frac{r}{n}$$

2. 条件概率和乘法公式

（1）条件概率

$P(A|B)$ 表示在事件 B 已经发生的条件下，事件 A 发生的概率，称为条件概率。须要指出的是条件概率 $P(A|B)$ 仍是事件 A 的概率，但是它有条件，以 B 已经发生为前提。

计算公式：① 若 $P(B)>0$，则 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$；

② 若 $P(A)>0$，则 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

计算条件概率有两个基本的方法：其一，用定义计算；其二，在古典概型中利用古典概型的计算方法直接计算。

（2）乘法公式

① 若 $P(B)>0$，则 $P(AB)=P(B)P(A|B)$；

② 若 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$。

乘法公式可以推广到 n 个事件的情况：

① 设 $P(AB)>0$ 时，则

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

② 设$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$时，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

3. 全概率公式和贝叶斯公式

（1）设事件A_1，A_2，…，A_n满足如下两个条件：

① A_1，A_2，…，A_n互不相容，且$P(A_i)>0$，i=1，2，…，n；

② $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，即$A_1$，$A_2$，…，$A_n$至少有一个发生，则称$A_1$，$A_2$，…，$A_n$为样本空间$\Omega$的一个划分。

当A_1，A_2，…，A_n是Ω的一个划分时，则每次试验有且只有其中的一个事件发生。

（2）全概率公式

设随机试验对应的样本空间为Ω，设A_1，A_2，…，A_n是样本空间Ω的一个划分，B是任意一个事件，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

（3）贝叶斯公式

设A_1，A_2，…，A_n是样本空间的一个划分，B是任一事件，且$P(B)>0$，则

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)},\quad i=1,2,\cdots,n$$

【典型例题】

例 1 从标号为 1，2，…，101 的 101 个灯泡中任取一个，则取得标号为偶数的灯泡的概率为（　　）。

A. $\frac{50}{101}$　　B. $\frac{51}{101}$　　C. $\frac{50}{100}$　　D. $\frac{51}{100}$

【解】选 A。

例 2 从 0，1，2，3，4 五个数中任意取三个数，则这三个数中不含 0 的概率为__________。

【解】$\frac{2}{5}$。

例 3 设随机事件A与B互不相容，$P(A)=0.2$，$P(B)=0.4$，则$P(B|A)=$（　　）。

A. 0　　B. 0.2　　C. 0.4　　D. 1

【解】选 A。

例 4　设 $P(A)=0.5$，$P(A\overline{B})=0.4$，则 $P(B\mid A)=$__________。

【解】$\frac{1}{5}$。

例 5　一批产品中不合格产品占 5%，而合格产品中一等品占 60%，从这批产品中任取一件，则该件产品是一等品的概率为（　　）。

A. 0.20　　B. 0.30　　C. 0.38　　D. 0.57

【解】选 D。

例 6　一批产品，由甲厂生产的占$\frac{1}{3}$，其次品率为 5%，由乙厂生产的占$\frac{2}{3}$，其次品率为 10%，从这批产品中随机取一件，恰好取到次品的概率为__________。

【解】$\frac{1}{12}$。

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1.设 A，B 为两个随机事件，且 $P(A)>0$，则 $P(A\cup B\mid A)=$（　　）。

A. $P(AB)$　　B. $P(A)$　　C. $P(B)$　　D. 1

2.设 A 与 B 互为对立事件，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则下列各式中错误的是（　　）。

A. $P(\overline{A}\mid B)=0$　　B. $P(B\mid A)=0$　　C. $P(AB)=0$　　D. $P(A\cup B)=1$

3.设 A，B 为两个随机事件，且 $P(AB)>0$，则 $P(A\mid AB)=$（　　）。

A. $P(A)$　　B. $P(AB)$　　C. $P(A\mid B)$　　D. 1

4. 一批产品共有 10 件，其中 2 件为次品，从这批产品中任取 3 件，则取出的 3 件中恰有 1 件次品的概率为（　　）。

A. $\frac{1}{60}$　　B. $\frac{7}{45}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{7}{15}$

5. 设事件 A，B 互不相容，已知 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.5$，则 $P(\overline{A}\overline{B})=$（　　）。

A. 0.1　　B. 0.4　　C. 0.9　　D. 1

6. 已知 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.5$，且 $A\subset B$，则 $P(A\mid B)=$（　　）。

A. 0　　B. 0.4　　C. 0.8　　D. 1

二、填空题

1. 假设袋中装有 6 只红球、4 只白球，每次从袋中取 1 只球观其颜色后放回，并再放入

1 只相同颜色的球，若连取两次，则第一次取得红球且第二次取得白球的概率等于____________。

2. 一个盒子中有 6 颗黑棋子、9 颗白棋子，从中任取两颗，则这两颗棋子是不同颜色的概率为____________。

3. 20 件产品中有 2 件次品，不放回地从中连续取两次，每次取一件，则第二次取到正品的概率为________。

4. 设 $P(A|B)=\dfrac{1}{6}$， $P(\overline{B})=\dfrac{1}{2}$， $P(B|A)=\dfrac{1}{4}$，则 $P(A)=$_______。

5. 一个袋中有 7 个红球和 3 个白球，从袋中有放回地取两次球，每次取一个，则第一次取得红球且第二次取得白球的概率 $p=$________。

6. 一个袋中装有 3 只红球，2 只黑球，从中任意取出 2 只球，则这两只恰为一红一黑的概率是________________。

7. 设 A,B 为随机事件，且 $P(A)=0.8$，$P(B)=0.4$，$P(B|A)=0.25$，则 $P(A|B)=$______。

8. 有甲、乙两人，每人扔两枚均匀硬币，则两人所扔硬币均未出现正面的概率为______。

9. 袋中有 5 个黑球、3 个白球，从中任取 4 个球，恰有 3 个白球的概率为___________。

10. 盒中有 4 个棋子，其中 2 个白子、2 个黑子，现有 1 人从盒中随机地取出 2 个棋子，这 2 个棋子颜色相同的概率为________。

11. 将三个不同的球随机地放入三个不同的盒中，则出现两个空盒的概率为______。

12. 袋中有 8 个玻璃球，其中蓝、绿颜色球各 4 个，现将其任意分成 2 堆，每堆 4 个球，则各堆中蓝、绿两种球的个数相等的概率为______。

13. 设 $P(\overline{A})=0.3$， $P(B|A)=0.6$， 则 $P(AB)=$________。

14. 10 件同类产品中有 1 件次品，现从中不放回地连续取 2 件产品，则在第一次取得正品的条件下，第二次取得次品的概率是________。

15. 某工厂一班组共有男工 6 人、女工 4 人，从中任选 2 名代表，则其中恰有 1 名女工的概率为________。

三、计算题

1. 设 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.5$，且 $P(\overline{A}|\overline{B})=0.3$，求 $P(AB)$。

2. 某用户从两厂家购买一批同类型的产品，其中甲厂生产的占 60%，若甲、乙两厂产品的次品率分别为 5%、10%，现从这批产品中任取一个，求其为次品的概率。

3. 100 张彩票中有 7 张有奖彩票，有甲、乙两人且甲先乙后各买一张，试计算甲、乙两人中奖的概率是否相同？

4. 某商店有 100 台相同型号的冰箱待售，其中 60 台是甲厂生产的，25 台是乙厂生产的，15 台是丙厂生产的，已知这三个厂生产的冰箱质量不同，它们的不合格率依次为 0.1，0.4，0.2，现有一位顾客从这批冰箱中随机地选取一台，试求：

（1）该顾客选取一台合格冰箱的概率；

（2）顾客开箱测试后发现冰箱不合格，试问这台冰箱来自甲厂的概率是多少？

5. 设工厂甲、乙、丙三个车间生产同一种产品，产量依次占全厂产量的 45%，35%，20%，且各车间的次品率分别为 4%，2%，5%.求：

（1）从该厂生产的产品中任取 1 件次品的概率；

（2）该件次品是由甲车间生产的概率。

6. 设 A，B 是两事件，已知 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.6$，试在下列两种情形下，分别求出 $P(A|B)$：

（1）事件 A，B 互不相容；（2）事件 A，B 有包含关系。

7. 某种灯管按要求使用寿命超过 1000 小时的概率为 0.8，超过 1200 小时的概率为 0.4，现有该种灯管已经使用了 1000 小时，求该灯管将在 200 小时内坏掉的概率。

【参考答案】

一、单项选择题

1.～6. DADDAC

二、填空题

1.～5. $\frac{12}{55}$；　$\frac{18}{35}$；　$\frac{9}{10}$；　$\frac{1}{3}$；　$\frac{7}{30}$；

6.～10. $\frac{3}{5}$；　$\frac{1}{2}$；　$\frac{1}{16}$；　$\frac{1}{14}$；　$\frac{1}{3}$；

11.～15. $\frac{1}{9}$；　$\frac{18}{35}$；　0.42；　$\frac{1}{9}$；　$\frac{8}{15}$

三、计算题

1. 0.05；　2. 0.07；　3. $\frac{7}{100}$，相同；　4. 0.81，$\frac{9}{16}$；

5. 0.035，0.5143；　6. 0，$\frac{1}{2}$；　7. $\frac{1}{2}$

【课后练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 将一枚均匀的硬币抛掷三次，恰有一次出现正面的概率为（　　）。

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{3}{8}$　　D. $\frac{1}{2}$

2. 设 A，B 为两事件，已知 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{2}{3}$，$P(\overline{B}|A)=\frac{3}{5}$，则 $P(B)=$（　　）。

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

3. 设 A，B 为两个随机事件，且 $B\subset A$，$P(B)>0$，则 $P(A|B)=$（　　）。

A. 1　　B. $P(A)$　　C. $P(B)$　　D. $P(AB)$

4. 设随机事件A与B互不相容，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则（　　）。

A. $P(B|A)=0$　　B. $P(A|B)>0$

C. $P(A|B)=P(A)$　　D. $P(AB)=P(A)P(B)$

5. 袋中有 5 个红球，3 个白球，2 个黑球，现从中任取 3 个球，其恰为一红一白一黑的概率为（　　）。

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

6. 设 A，B 为随机事件，已知 $P(A)=0.3$，则有（　　）。

A. $P(B|A)+P(\overline{B}|\overline{A})=1$　　B. $P(B|A)+P(B|\overline{A})=1$

C. $P(\overline{B}|A)+P(B|A)=1$　　D. $P(B)=0.7$

7. 设 A 与 B 相互独立，$P(A)=0.2$，$P(B)=0.4$，则 $P(\overline{A}|B)=$（　　）。

A. 0.2　　B. 0.4　　C. 0.6　　D. 0.8

二、填空题

1. 已知 10 件产品中有 2 件次品，从该产品中任意取 3 件，则恰好取到一件次品的概率等于______。

2. 已知某地区的人群吸烟的概率是 0.2，不吸烟的概率是 0.8，若吸烟使人患某种疾病的概率为 0.008，不吸烟使人患该种疾病的概率是 0.001，则该地区人群患这种疾病的概率等于______。

3. 袋中有 5 个黑球、3 个白球，从中任取 4 个球中恰有 3 个白球的概率为______。

4. 袋内有5个红球、3个白球和2个黑球，从中任取3个球，则恰好取到1个红球、1个白球和1个黑球的概率为______。

5. 盒中有 10 个球，分别编有 1～10 的号码，设 A=“取到球的号码是偶数”，B=“取到球的号码小于 5”，则 $\overline{A}\,\overline{B}=$______。

6. 设 A，B 为随机事件，$P(A)=0.6$，$P(B|A)=0.3$，则$P(AB)=$______。

7. 从数字 1，2，…，10 中有放回地任取 4 个数字，则数字 10 恰好出现两次的概率为________。

8. 若 1，2，3，4，5 号运动员随机排成一排，则 1 号运动员站在正中间的概率为_________。

9.袋中有 3 只红球、2 只黑球，现从中任意取出 2 只球，则这 2 只恰为 1 红 1 黑的概率是__________。

10. 在一次读书活动中，某同学从 2 本科技书和 4 本文艺书中任选 2 本，则选中的书都是科技书的概率为______。

11. 设 A，B 为随机事件，$P(A)=0.5$，$P(B)=0.4$，$P(A|B)=0.8$，则 $P(B|A)=$______。

12. 设袋中有 2 个黑球、3 个白球，有放回地连续取 2 次，每次取一个，则至少取到一个黑球的概率是______。

13. 设 A，B 为两事件，且 $P(A)=P(B)=\frac{1}{3}$，$P(A\mid B)=\frac{1}{6}$，则 $P(\overline{A}|\overline{B})=$________。

14. 已知事件 A，B 满足 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，若 $P(A)=0.2$，则 $P(B)=$_________。

三、计算题

1. 飞机在雨天晚点的概率为 0.8，在晴天晚点的概率为 0.2，天气预报称明天有雨的概率为 0.4，试求飞机晚点的概率。

2. 设一批产品中有 95%的合格品，且在合格品中一等品的占有率为 60%。求：

（1）从该批产品中任取 1 件，其为一等品的概率；

（2）在取出的 1 件产品不是一等品的条件下，其为不合格产品的概率。

3. 某一地区患有癌症的人占 0.005，患者对一种试验反应呈阳性的概率为 0.95，正常人对这种试验反应呈阳性的概率为 0.04，现抽查了一个人，试验反应呈阳性，问此人是癌症患者的概率有多大？

4. 盒中有 3 个新球、1 个旧球，第一次使用时从中随机取一个，用后放回，第二次使用时从中随机取两个，事件 A 表示“第二次取到的全是新球”，求 $P(A)$。

5. 设 A，B 为随机事件，$P(A)=0.2$，$P(B\mid A)=0.4$，$P(A\mid B)=0.5$。求：①$P(AB)$；②$P(A\cup B)$。

6. 一批零件由两台车床同时加工，第一台车床加工的零件数比第二台多一倍。第一台车床出现不合格产品的概率是 0.03，第二台出现不合格产品的概率是 0.06。求：

（1）任取一个零件是合格产品的概率；

（2）如果取出的零件是不合格产品，求它是由第二台车床加工的概率。

7. 设在某条国道上行驶的高速客车与一般客车的数量之比为 1∶4，假设高速客车因发

生故障需要停驶检修的概率为 0.002，一般客车因发生故障需要停驶检修的概率为 0.01。求：

（1）该国道上有客车因发生故障需要停驶检修的概率；

（2）已知该国道上有一辆客车因发生故障需要停驶检修，问这辆客车是高速客车的可能性有多大？

【参考答案】

一、单项选择题

1.～5. CAAAA；　6.～7. CD

二、填空题

1.～5.　$\frac{7}{15}$；　0.0024；　$\frac{1}{14}$；　$\frac{1}{4}$；　$\{5,7,9\}$；

6.～10.　0.18；　0.0486；　$\frac{1}{5}$；　$\frac{3}{5}$；　$\frac{1}{15}$；

11.～14.　0.64；　$\frac{16}{25}$；　$\frac{7}{12}$；　0.8

三、计算题

1. **【解】**设 A 表示“雨天”，B 表示“飞机晚点”，

则由题意得

$$P(A)=0.4,\ P(B|A)=0.8,\ P(B|\overline{A})=0.2$$

由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})\\&=0.4\times0.8+(1-0.4)\times0.2=0.44\end{aligned}$$

即飞机晚点的概率为 0.44。

2. **【解】**（1）设事件 A 表示“从该批产品中任取一件为合格品”，B 表示“从该批产品中任取一件为一等品”。

则 $B\subset A,\quad AB=B$，即

$$P(B)=P(AB)=P(A)P(B|A)=0.95\times0.60=0.57$$

（2）$P(\overline{A}|\overline{B})=\dfrac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})}$，因 $B\subset A,\ \overline{A}\subset\overline{B}$，从而

$$P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{P(\overline{A})}{P(\overline{B})}=\frac{1-0.95}{1-0.57}=\frac{5}{43}\approx0.12$$

3. **【解】**设 A 表示“抽查的人患有癌症”，B 表示“试验结果是阳性”，

则由题意得

$$P(A)=0.005,\ P(\overline{A})=0.995,\ P(B|A)=0.95,\ P(B|\overline{A})=0.04$$

由贝叶斯公式得

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}$$

$$=\frac{0.005\times0.95}{0.005\times0.95+0.995\times0.04}=0.1066$$

即此人是癌症患者的概率为 0.1066。

4. 【解】设 A 表示“第二次取到的全是新球”，B 表示“第一次取到的是新球”，则由题意得

$$P(B)=\frac{3}{4},\ P(\overline{B})=\frac{1}{4},\ P(A|B)=\frac{1}{C_4^2}=\frac{1}{6},\ P(A|\overline{B})=\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{2}$$

由全概率公式得

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

5. 【解】（1）因为 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，代入 $P(B|A)=0.4$， $P(A)=0.2$，得 $P(AB)=0.08$ 。

（2）因为 $0.5=P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0.08}{P(B)}$，得 $P(B)=0.16$，又

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=0.2+0.16-0.08=0.28。$$

6. 【解】（1）设 A 表示“取到第一台车床加工的零件”， B 表示“取到合格品”，则由题意得

$$P(A)=\frac{2}{3},\ P(B|A)=0.97,\ P(B|\overline{A})=0.94$$

由全概率公式得

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$$

$$=\frac{2}{3}\times0.97+\frac{1}{3}\times0.94=0.96$$

（2）由贝叶斯公式得

$$P\left(\bar{A}\middle|\bar{B}\right)=\frac{P\left(\bar{A}\right)P\left(\bar{B}\middle|\bar{A}\right)}{P\left(\bar{B}\right)}=\frac{\frac{1}{3}\times 0.06}{0.04}=0.5$$

7. 【解】（1）设 A 表示“高速客车”，B 表示“需要停驶检修”，

则由题意得

$$P(A)=0.2,\ P\left(\bar{A}\right)=0.8,\ P\left(B|A\right)=0.002,\ P\left(B\middle|\bar{A}\right)=0.01$$

由全概率公式得

$$P(B)=P(A)P\left(B|A\right)+P\left(\bar{A}\right)P\left(B\middle|\bar{A}\right)$$

$$=0.2\times 0.002+0.8\times 0.01=0.0084$$

（2）由贝叶斯公式得

$$P\left(A|B\right)=\frac{P(A)P\left(B|A\right)}{P(B)}=\frac{0.2\times 0.002}{0.0084}=\frac{1}{21}$$

考点 3　事件的独立性

【考点内容】

1. 独立性的定义及性质

对事件 A，B，如果

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称它们是相互独立的，简称 A，B 独立。

A，B 相互独立时，若 $P(A)>0$，则 $P\left(B|A\right)=P(B)$，反之亦然；若 $P(B)>0$，则 $P\left(A|B\right)=P(A)$，反之亦然；

若 A，B 相互独立，则 A，$\bar{B}$，$\bar{A}$，B，$\bar{A}$，$\bar{B}$ 与也都相互独立。

设 A，B，C 是三事件，如果满足

① $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$；

② $P(AB)=P(A)P(B)$；

③ $P(BC)=P(B)P(C)$；

④ $P(AC)=P(A)P(C)$.

则称 A，B，C 三个事件相互独立.故三个或三个以上事件两两相互独立时，不一定相互独立。

2. n重贝努利试验

如果试验满足以下条件：

① 每次试验都在相同条件下进行，即每次试验所对应的样本空间是相同的；

② 每次试验是相互独立的；

③ 每次试验有且仅有两种结果——事件 A 和 $\overline{A}$；

④ 每次试验结果发生的概率相同，$P(A)=p$，$P(\overline{A})=q=1-p$。

则称这种试验为 n 重贝努利试验。

在 n 重贝努利试验中，“事件 A 发生 k 次”这一事件的概率记作 $P_n(k)$

即
$$P_n(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

【典型例题】

例 1　设事件 A 与 B 相互独立，且 $P(A)>0, P(B)>0$，则下列等式中成立的是（　　）。

A. $AB=\phi$　　　　B. $P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$

C. $P(B)=1-P(A)$　　　　D. $P(B|\overline{A})=0$

【解】选 B。

例 2　设 A 与 B 相互独立，$P(A)=0.2$，$P(B)=0.4$，则 $P(\overline{A}|B)=$（　　）。

A. 0.2　　B. 0.4　　C. 0.6　　D. 0.8

【解】选 D。

例 3　设事件 A 与 B 相互独立，且 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)>0$，则 $P(A|B)=$（　　）。

A. $\frac{1}{15}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{4}{15}$　　D. $\frac{1}{3}$

【解】选 D。

例 4　同时抛掷 3 枚均匀的硬币，则恰好 3 枚均为正面朝上的概率为（　　）。

A. 0.125　　B. 0.25　　C. 0.375　　D. 0.5

【解】选 A。

例 5　设事件 A，B 相互独立，且 $P(A)=0.2$，$P(B)=0.4$，则 $P(A\cup B)=$__________。

【解】0.52。

例 6　甲、乙两门高射炮彼此独立地向一架飞机各发射一炮，甲、乙击中飞机的概率分别为 0.4，0.5，则飞机至少被击中一炮的概率为____________。

【解】0.7。

例 7 某射手对一目标独立射击 4 次，每次射击的命中率为 0.5，则 4 次射击中恰好命中 3 次的概率为________。

【解】 $\frac{1}{4}$。

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 已知事件 A，B 相互独立，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则下列等式中成立的是（　　）。

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　　B. $P(A\cup B)=1-P(\bar{A})P(\bar{B})$

C. $P(A\cup B)=P(A)P(B)$　　D. $P(A\cup B)=1$

2. 设 A，B 相互独立，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则下列等式中成立的是（　　）。

A. $P(AB)=0$　　B. $P(A-B)=P(A)P(\bar{B})$

C. $P(A)+P(B)=1$　　D. $P(A|B)=0$

3. 设每次试验成功的概率为 p（$0<p<1$），则在 3 次独立重复试验中至少成功一次的概率为（　　）。

A. $1-(1-p)^3$　　B. $p(1-p)^2$　　C. $C_3^1p(1-p)^2$　　D. $p+p^2+p^3$

4. 某人射击三次，其命中率为 0.8，则三次中至多命中一次的概率为（　　）。

A. 0.002　　B. 0.04　　C. 0.08　　D. 0.104

5. 某人射击三次，其命中率为 0.7，则三次中至多命中一次的概率为（　　）。

A. 0.027　　B. 0.081　　C. 0.189　　D. 0.216

6. 同时抛掷 3 枚均匀的硬币，则恰好有两枚正面朝上的概率为（　　）。

A. 0.125　　B. 0.25　　C. 0.375　　D. 0.50

7. 设在三次独立重复试验中，事件 A 出现的概率都相等，若已知 A 至少出现一次的概率为 $\frac{19}{27}$，则事件 A 在一次试验中出现的概率为（　　）。

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

8. 某人每次射击命中目标的概率为 p（$0<p<1$），他向目标连续射击，则第一次未命中第二次命中的概率为（　　）。

A. p^2　　B. $(1-p)^2$　　C. $1-2p$　　D. $p(1-p)$

二、填空题

1. 连续抛一枚均匀硬币 5 次，则正面都不出现的概率为__________。

2. 袋中有红、黄、蓝球各一个，从中任取三次，每次取一个，取后放回，则红球出现的概率为__________。

3. 设事件 A，B 相互独立，$P(A\cup B)=0.6, P\left(\bar{A}\right)=0.4$，则 $P(B)=$__________。

4. 设事件 A 与 B 相互独立，且 P（A）=0.3，P（B）=0.4，则 P（$A\cup B$）=__________。

5. 已知 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}$，且 A，B 相互独立，则 $P(A\bar{B})=$__________。

6. 连续抛一枚均匀硬币 6 次，则正面至少出现一次的概率为__________。

7. 设事件 A，B 相互独立，且 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.2$，则 P（$A\cup B$）=__________。

8. 某人工作一天出废品的概率为 0.2，则工作四天中仅有一天出废品的概率为__________。

9. A，B 为两个随机事件，A 与 B 相互独立，$P(A)=0.3$，$P(B)=0.4$，则 $P(A\bar{B})=$__________。

10. 同时扔 3 枚均匀硬币，则至多有一枚硬币正面朝上的概率为________。

11. 设事件 A 与 B 相互独立，且 $P(A\cup B)=0.6, P\left(\bar{A}\right)=0.2$，则 $P(B)=$________。

三、计算题

1. 某气象站天气预报的准确率为 0.8，且各次预报之间相互独立。试求：

（1）5 次预报全部准确的概率 p_1；

（2）5 次预报中至少有 1 次准确的概率 p_2。

2. 设有两种报警系统Ⅰ与Ⅱ，它们单独使用时，有效的概率分别为 0.92 与 0.93，且已知在系统Ⅰ失效的条件下，系统Ⅱ有效的概率为 0.85，试求：

（1）系统Ⅰ与Ⅱ同时有效的概率；

（2）至少有一个系统有效的概率。

【参考答案】

一、单项选择题

1.～5. BBADD　6.～8. CCD

二、填空题

1.～5. $\dfrac{19}{27}$；　$\dfrac{1}{3}$；　0.58；　$\dfrac{1}{3}$；　$\dfrac{1}{4}$；

6.～11. $\dfrac{63}{64}$；　0.6；　0.4096；　0.18；　$\dfrac{1}{2}$；　$\dfrac{1}{2}$

三、计算题

1. 0.32768，0.99968；　2. 0.862，　0.988

【课后练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则由事件 A，B 相互独立，可推出（　　）。

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　　B. $P(A|B)=P(A)$

C. $P(\overline{B}|\overline{A})=P(\overline{A})$　　D. $A=\overline{B}$

2. 设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(A)=\frac{1}{5}$，$P(B)=\frac{3}{5}$，则 $P(A\cup B)=$（　　）。

A. $\frac{3}{25}$　　B. $\frac{17}{25}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{23}{25}$

3. 已知一射手在两次独立射击中至少命中目标一次的概率为 0.96，则该射手每次射击的命中率为（　　）。

A. 0.04　　B. 0.2　　C. 0.8　　D. 0.96

4. 某人射击三次，其命中率为 0.8，则三次中至多命中一次的概率为（　　）。

A. 0.002　　B. 0.04　　C. 0.08　　D. 0.104

二、填空题

1. A，B 相互独立且都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$______。

2. 设随机事件 A 与 B 相互独立，且 P（A）=0.7，$P(A-B)=0.3$，则 $P(\overline{B})=$______。

3. 设随机事件 A，B 相互独立，$P(\overline{AB})=\frac{1}{25}$，$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$，则 $P(\overline{A})=$________。

4. 某地一年内发生旱灾的概率为 $\frac{1}{3}$，则在今后连续四年内至少有一年发生旱灾的概率为__________。

5. 设随机事件A与B相互独立，且$P(A)=P(B)=\frac{1}{3}$，则$P(A\cup\overline{B})=$_________。

6. 设 A，B 为随机事件，$P(A)=\frac{1}{3}$，$P(A\cup B)=\frac{2}{3}$，若事件 A，B 相互独立，则 $P(B)=$_____。

7. 设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.5$，则$P(AB)=$________。

8. 设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(A)=0.5$，$P(A\overline{B})=0.3$，则 $P(B)=$______。

9. 设甲、乙独立地向同一目标射击，甲、乙击中目标概率分别为 0.8，0.5，则甲、乙同时击中目标的概率为_________。

三、计算题

1. 设随机事件A_1，A_2，A_3相互独立，且$P(A_1)=0.4$，$P(A_2)=0.5$，$P(A_3)=0.7$。

求：（1）A_1，A_2，A_3恰有一个发生的概率；

（2）A_1，A_2，A_3至少有一个发生的概率。

2. 某生产线上的产品按质量情况分为 A，B，C 三类。检验员定时从该生产线上任取 2 件产品进行抽检，若发现其中两件全是 A 类产品或一件 A 类一件 B 类产品，就不须要调试设备，否则需要调试.已知该生产线上生产的每件产品为 A 类产品、B 类产品和 C 类产品的概率分别为 0.9，0.05 和 0.05，且各件产品的质量情况互不影响。

求：（1）抽到的两件产品都为 B 类产品的概率 P_1；

（2）抽检后设备不需要调试的概率 P_2。

【参考答案】

一、单项选择题

1.～4. BBCD

二、填空题

1.～5. $\frac{2}{3}$；　$\frac{3}{7}$；　$\frac{1}{5}$；　$\frac{65}{81}$；　$\frac{7}{9}$；

6.～9. $\frac{1}{2}$；　0.2；　0.4；　0.4

三、计算题

1. **【解】**（1）设 B 表示事件“A_1，A_2，A_3 恰有一个发生”，C 表示事件“A_1，A_2，A_3 至少有一个发生”

$$\begin{aligned}P(B)&=P\left(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\right)\\&=P\left(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\right)+P\left(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\right)+P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\right)\\&=P(A_1)P\left(\overline{A}_2\right)P\left(\overline{A}_3\right)+P\left(\overline{A}_1\right)P(A_2)P\left(\overline{A}_3\right)+P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_2\right)P(A_3)\\&=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7\\&=0.36\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}P(C)&=P\left(A_1\cup A_2\cup A_3\right)=1-P\left(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}\right)\\&=1-P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\right)=1-P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_2\right)P\left(\overline{A}_3\right)\\&=1-0.6\times0.5\times0.3=0.91\end{aligned}$$

2. **【解】**（1）设 B_i 表示事件“抽到的第 i 件产品为 B 类产品”，$i=1$，2

则 $$P_1 = P(B_1B_2) = P(B_1)P(B_2) = 0.05\times 0.05 = 0.0025$$

（2）设 A_i 表示事件“抽到的第 i 件产品为 A 类产品”， $i=1$，2

则
$$\begin{aligned}
P_2 &= P(A_1A_2 \cup A_1B_2 \cup B_1A_2) \\
&= P(A_1A_2) + P(A_1B_2) + P(B_1A_2) \\
&= P(A_1)P(A_2) + P(A_1)P(B_2) + P(B_1)P(A_2) \\
&= 0.9^2 + 0.9\times 0.05 + 0.05\times 0.9 = 0.9
\end{aligned}$$

第二章　随机变量及其概率分布

【考核要求】

理解随机变量及其分布函数的概念；理解离散型随机变量及其分布律的概念；掌握较简单的离散型随机变量分布律的计算；掌握两点分布、二项分布、泊松分布；理解连续型随机变量及其概率密度函数的概念、性质及有关计算；掌握均匀分布、指数分布及其计算；熟练掌握正态分布及其计算；了解随机变量函数的概念，能计算简单的随机变量函数的概率分布。

重点：随机变量的分布律与概率密度函数的定义、性质及计算；随机变量函数的分布，几种常用分布。

难点：随机变量的分布律，概率密度函数，随机变量的函数的分布律，分布函数，概率密度函数。

考点 1　一维离散型随机变量

【考点内容】

1. 离散型随机变量

（1）随机变量的概念

设 E 是随机试验，样本空间为 Ω，如果对于每一个结果(样本点) $\omega\in\Omega$，有一个实数 $X(\Omega)$ 与之对应，这样就得到一个定义在 Ω 上的实值函数 $X{=}X(\Omega)$，称为随机变量。随机变量通常用 X，Y，Z，$\cdots$ 或 X_1，Y_2，$\cdots$ 来表示。

这种变量之所以称为随机变量，是因为它的取值随实验的结果而定，而实验结果的出现是随机的，因而它的取值也是随机的。

随机变量分为离散型随机变量和非离散型随机变量。

（2）离散型随机变量及其分布律

若随机变量 X 只取有限多个或可列无限多个值，则 X 称为离散型随机变量。

若 X 的可能取值为 x_1，$x_2,\cdots$，$x_k\cdots$ 且：

$$P\{X=x_k\}=p_k，k=1，2\cdots$$

则称 $\{p_k\}$ 为 X 的分布律（或概率分布）。

分布律也可写成表格

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

分布律有以下性质：

① $p_k \geqslant 0，k=1，2\cdots$

② $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

2. 常见的离散型随机变量的分布

（1）$0-1$分布

若随机变量 X 只取两个可能值 0，1，且

$$P\{X=1\}=p，P\{X=0\}=q$$

其中 $0<p<1，q=1-p$，则称 X 服从$0-1$分布。X 的分布律为

X	0	1
P	q	p

在 n 重贝努利试验中，每次试验只观察 A 是否发生，定义随机变量 X 如下：

$$X=\begin{cases}0 & 当A发生\\ 1 & 当A不发生\end{cases}$$

因为 $P(X=0)=P(\overline{A})=1-p$，$P(X=1)=P(A)=p$，所以 X 服从$0-1$分布。$0-1$分布是最简单的分布，任何只有两种结果的随机现象，如新生儿是男是女，明天是否下雨，抽查一下产品是正品还是次品等，都可用它来描述。

（2）二项分布

若随机变量 X 的可能取值为$0，1，\cdots，n$，而 X 的分布律为

$$P_k=P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}，k=0，1，2，\cdots，n$$

其中 $0<p<1，p+q=1$，则称 X 服从参数为$n，p$的二项分布，简记为 $X\sim B(n,p)$。

显然，当 $n=1$ 时，X 服从$0-1$分布，即$0-1$分布实际上是二项分布的特例。

在 n 重贝努利实验中，令 X 为 A 发生的次数，则

$$P\{X=k\}=P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}，\ k=0，1，2，\cdots，\ n$$

即 X 服从参数为 n，p 的二项分布。

（3）泊松分布

若随机变量 X 的可能取值为 $0，1，\cdots，n，\cdots$，而 X 的分布律为

$$P_k=P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}，\ k=0，1，2，\cdots$$

其中 $\lambda>0$，则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布，简记为 $X\sim P(\lambda)$。

二项分布的泊松逼近：

当 n 较大，p 较小时，二项分布以泊松分布为近似分布，即

$$C_n^k p^k q^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}，\ \lambda=np$$

3. 离散型随机变量函数的概率分布

若 X 的分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

则 $Y=g(X)$ 的分布律为

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_k)$	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

若 $g(x_1)$，$g(x_2)$，$\cdots$，$g(x_k)$ 中有相等的情况时，应把使 $g(x_k)$ 相等的那些 x_k 所对应的概率相加为 Y，作为 $g(x_k)$ 的概率。

4. 随机变量的分布函数

（1）分布函数的定义

设 X 为随机变量，称函数

$$F(x)=P(X\leqslant x)\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

为 X 的分布函数。

（2）分布函数的性质

① $0\leqslant F(x)\leqslant 1$；

② $F(x)$ 是不减函数，即对于任意的 $x_1<x_2$，有 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$；

③ $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$；$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$；

④ $F(x)$右连续，即 $F(x+0)=\lim\limits_{\Delta x\to0^{+}}F(x+\Delta x)=F(x)$

（3）一个常用的式子

$$P(x_1<X\leqslant x_2)=F(x_2)-F(x_1)$$

【典型例题】

例 1　下列各表中可作为某随机变量分布律的是（　　）

A.

X	0	1	2
P	0.3	0.5	0.1

B.

X	0	1	2
P	0.5	0.2	0.1

B.

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/4

D.

X	0	1	2
P	1/3	2/5	4/15

【解】选 D。

例 2　已知随机变量 $X\sim B\left(n,\dfrac{1}{2}\right)$，且 $P\{X=5\}=\dfrac{1}{32}$，则 n=__________。

【解】5。

例 3　抛一枚均匀硬币 5 次，记正面朝上的次数为 X，则 $P\{X\geqslant1\}=$__________。

【解】$\dfrac{31}{32}$。

例 4　设随机变量 $X\sim B\left(4,\dfrac{2}{3}\right)$，则 $P\{X<1\}=$__________。

【解】$\dfrac{1}{81}$。

例 5　下列各函数可作为随机变量分布函数的是（　　）

A. $F_1(x)=\begin{cases}2x & 0\leqslant x\leqslant1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

B. $F_2(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x, & 0\leqslant x<1\\ 1 & x\geqslant1\end{cases}$

C. $F_3(x)=\begin{cases}-1 & x<-1\\ x & -1\leqslant x<1\\ 1 & x\geqslant1\end{cases}$

D. $F_4(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 2x & 0\leqslant x<1\\ 2 & x\geqslant1\end{cases}$

【解】选 B。

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2
P	0.3	0.2	0.5

则 $P\{X<1\}=$（　　）。

A. 0　　B. 0.2　　C. 0.3　　D. 0.5

2. 设随机变量 $X \sim B\left(3, \frac{1}{3}\right)$，则 $P\{X \geqslant 1\}=$（　　）。

A. $\frac{1}{27}$　　B. $\frac{8}{27}$　　C. $\frac{19}{27}$　　D. $\frac{26}{27}$

3. 已知随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leqslant x<1 \\ \frac{2}{3} & 1 \leqslant x<3 \\ 1 & x \geqslant 3 \end{cases}$，则 $P\{X=1\}=$（　　）。

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 1

二、填空题

1. 设随机变量 X 表示 4 次独立射击命中目标的次数，每次命中目标的概率为 0.5，则 X～__________分布。

2. 在相同条件下独立进行 4 次射击，设每次射击命中目标的概率为 0.7，则在 4 次射击中命中目标的次数 X 的分布律为 $P\{X=i\}=$__________，i=0，1，2，3，4。

3. 在 $[0，T]$ 内通过某交通路口的汽车数 X 服从泊松分布，且已知 $P(X=4)=3P(X=3)$，则在 $[0，T]$ 内至少有一辆汽车通过的概率为__________。

4. 设随机变量 $X \sim B\left(4, \frac{1}{3}\right)$，则 $P\{X>0\}=$__________。

5. 设离散型随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1
P	$2C$	0.4	C

则常数 C=__________。

6. 设随机变量 $X\sim B(2, p)$，$Y\sim B(3, p)$，若 $P\{X\geqslant 1\}=\dfrac{5}{9}$，则 $P\{Y\geqslant 1\}=$ ___________。

7. 设随机变量 X 的概率分布为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{56}$

$F(x)$为其分布函数，则 $F(3)=$ ___________。

8. 设离散型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ \dfrac{1}{3} & -1\leqslant x<2\\ 1 & x\geqslant 2\end{cases}$，则 $P\{X=2\}=$ ___________。

9. 已知随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{1}{2} & 0\leqslant x<1\\ \dfrac{2}{3} & 1\leqslant x<3\\ 1 & x\geqslant 3\end{cases}$，则 $P\{2<X\leqslant 4\}=$ ___________。

10. 设离散型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ 0.2 & -1\leqslant x<0\\ 0.3 & 0\leqslant x<1\\ 0.6 & 1\leqslant x<2\\ 1 & x\geqslant 2\end{cases}$，则 $P\{X>1\}=$ ___________。

11. 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{16}$

且 $Y=X^2$，记随机变量 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则 $F_Y(3)=$ ___________。

三、计算题

1. 假设 10 件产品中有 8 件正品、2 件次品，每次从这批产品中任取 1 件，取出的产品不放回，设 X 为直至取得正品为止所需抽取的次数，求 X 的分布律。

2. 袋中装有 5 只球，编号为 1，2，3，4，5，现从袋中同时取出 3 只，以 X 表示取出的 3 只球中的最大号码，试求：

（1）X 的概率分布；

（2）X 的分布函数；

（3）$Y=X^2+1$ 的概率分布。

【参考答案】

一、单项选择题

1.～3. CCA

二、填空题

1.～5. $B(4,0.5)$；$C_4^i 0.7^i 0.3^{4-i}$；$1-e^{-12}$；$\frac{65}{81}$；0.2；

6.～11. $\frac{19}{27}$；$\frac{53}{56}$；$\frac{2}{3}$；$\frac{1}{3}$；0.4；$\frac{9}{16}$

三、计算题

1.

X	1	2	3
P	4/5	8/45	1/45

2.（1）

X	3	4	5
P	1/10	3/10	3/5

（2）$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<3 \\ \frac{1}{10} & 3\leqslant x<4 \\ \frac{2}{5} & 4\leqslant x<5 \\ 1 & x\geqslant 5 \end{cases}$$

（3）

Y	10	17	26
P	1/10	3/10	3/5

【课后练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	0.2	0.3	k	0.1

则 k=（　　）。

A. 0.1　　B. 0.2　　C. 0.3　　D. 0.4

2. 设离散型随机变量 X 的分布律为

X	−1	0	1
P	0.1	0.2	0.4

则 $P\{-1<X\leqslant 1\}=$（　　）。

A. 0.3　　B. 0.4　　C. 0.6　　D. 0.7

3. 已知离散型随机变量 X 的概率分布如下表所示：

X	−1	0	1	2	4
P	1/10	1/5	1/10	1/5	2/5

则下列概率计算结果中正确的是（　　）。

A. $P(X=3)=0$　　B. $P(X=0)=0$

C. $P(X>-1)=1$　　D. $P(X<4)=1$

4. 已知随机变量 X 只能取值 −1，0，1，2，其相应概率依次为 $\frac{1}{2c}$，$\frac{3}{4c}$，$\frac{5}{8c}$，$\frac{7}{16c}$，则 $P(X<1|X\neq 0)=$（　　）。

A. $\frac{4}{25}$　　B. $\frac{8}{25}$　　C. $\frac{12}{25}$　　D. $\frac{16}{25}$

5. 设随机变量 $X\sim B(3,0.4)$，则 $P\{X\geqslant 1\}=$（　　）。

A. 0.352　　B. 0.432　　C. 0.784　　D. 0.936

6. 已知随机变量 X 的分布律为

X	−1	2	5
P	0.2	0.35	0.45

$P\{-2<X\leqslant 4\}=$（　　）。

A. 0.2　　B. 0.35　　C. 0.55　　D. 0.8

7.设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且满足 $P\{X=1\}=\dfrac{2}{3}P\{X=3\}$，则 $\lambda=$(　　)。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 设随机变量 X 服从泊松分布，且已知 $P(X=1)=P(X=2)$，则 $P(X=3)=$（　　）。

A. $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-1}$　　B. $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-2}$　　C. $\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-2}$　　D. $\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{-2}$

9. 下列函数中可作为随机变量分布函数的是（　　）。

A. $F_1(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$　　B. $F_2(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ x & 0\leqslant x<1\\ 1 & x\geqslant 1\end{cases}$

C. $F_3(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x & 0\leqslant x<1\\ 1 & x\geqslant 1\end{cases}$　　D. $F_4(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x & 0\leqslant x<1\\ 2 & x\geqslant 1\end{cases}$

10. 下列各函数中是随机变量 X 的分布函数的是（　　）。

A. $F(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$-\infty<x<+\infty$

B. $F(x)=\mathrm{e}^{-x}$，$-\infty<x<+\infty$

C. $F(x)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2\pi}\arctan x$，$-\infty<x<+\infty$

D. $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$

11. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，则（　　）。

A. $F(-\infty)=1$　　B. $F(0)=0$　　C. $F(+\infty)=0$　　D. $F(+\infty)=1$

12. 设 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数，则有（　　）。

A. $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=0$　　B. $F(-\infty)=1$，$F(+\infty)=0$

C. $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$　　D. $F(-\infty)=1$，$F(+\infty)=1$

二、填空题

1. 设随机变量 $X\sim B(1, 0.8)$（二项分布），则 X 的分布函数为__________。

2. 在时间 $[0, T]$ 内通过某交通路口的汽车数量 X 服从泊松分布，且已知 $P(X=4)=3P(X=3)$，则在时间 $[0, T]$ 内至少有一辆汽车通过的概率为__________。

3. 设随机变量 X 的分布律如下，记 $Y=X^2$，则 $P\{Y=4\}=$__________。

X	-2	0	1	2
P	0.1	0.2	0.3	0.4

4. 若随机变量 $X\sim B\left(4,\dfrac{1}{3}\right)$，则 $P\{X\geqslant 1\}=$__________。

5. 设离散型随机变量 X 服从参数为 3 的泊松分布，则概率 $P(X=0)=$______。

6. 设随机变量 X 服从参数为 3 的泊松分布，则 $P\{X=2\}=$______。

7. 已知离散型随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2
P	1/3	1/6	1/2

X 的分布函数值 $F\left(\dfrac{3}{2}\right)=$______。

8. 设随机变量 $X\sim B(3,\ 0.2)$，且随机变量 $Y=\dfrac{X(3-X)}{2}$，则 $P(Y=0)=$__________。

9. 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.5	0.2

则 $P(X\geqslant 1)=$______。

10. 设随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3	4	5
P	$2a$	0.1	0.3	a	0.3

则 $a=$__________。

11. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，已知 $F(2)=0.5$，$F(-3)=0.1$，则 $P\{-3<X\leqslant 2\}=$__________。

三、计算题

1. 设袋中有依次标着 -2，-1，1，2，3，3 数字的 6 个球，现从中任取一球，记随机变量 X 为取出的球标有的数字，求：

（1）X 的分布函数；（2）$Y=X^2$ 的概率分布。

2. 设 10 件产品中有 2 件次品，现进行连续无放回抽样，直至取到正品为止，求：

（1）抽样次数 X 的概率分布；

（2）X 的分布函数 $F(x)$；

（3）$P(X>-2)$；$P(1<X<3)$。

【参考答案】

一、单项选择题

1.～5. DCABC　6.～10. CCDCD　11.～12. DC

二、填空题

1.～5. $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 0.2 & 0\leqslant x<1\\ 1 & x\geqslant 1\end{cases}$；$1-e^{-12}$；$0.5$；$\dfrac{65}{81}$；$e^{-3}$；

6.～11. $\dfrac{9}{2}e^{-3}$；$\dfrac{1}{2}$；0.52；0.7；0.1；0.4

三、计算题

1. 【解】（1）由题意知，X 可能取值为 -2，-1，1，2，3，则 X 的概率分布为

X	-2	-1	1	2	3
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/3

因此 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-2\\ \dfrac{1}{6} & -2\leqslant x<-1\\ \dfrac{2}{6} & -1\leqslant x<1\\ \dfrac{3}{6} & 1\leqslant x<2\\ \dfrac{4}{6} & 2\leqslant x<3\\ 1 & x\geqslant 3\end{cases}$$

（2）$Y=X^2$ 的分布律为

Y	1	4	9
P	1/3	1/3	1/3

2.【解】（1）由题意知：随机变量 X 的可能取值为 1，2，3，其取值概率各为

X	1	2	3
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{1}{45}$

（2）X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{4}{5} & 1\leqslant x<2\\ \frac{44}{45} & 2\leqslant x<3\\ 1 & x\geqslant 3\end{cases}$$

（3） $P(X>-2)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

$P(1<X<3)=P(X=2)=\frac{8}{45}$

考点 2　二维连续型随机变量

【考点内容】

1. 连续型随机变量及其概率密度

（1）定义

若对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，存在非负函数 $f(x)$，对任意实数 x，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

则称 X 为连续型随机变量，并称 $f(x)$ 为 X 的概率密度函数，简称概率密度（或密度函数）。

由此定义可知，连续型随机变量的分布函数一定是连续函数，且连续型随机变量有一个特殊的性质：

$$P\{X=x\}=0$$

（2）性质

概率密度有以下性质：

① $f(x)\geqslant 0$；

② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$；

③ $P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$，$a\leqslant b$；

$$P(a<X\leqslant b)=P(a\leqslant X\leqslant b)=P(a<X<b)=P(a\leqslant X<b)$$

④ 设x为$f(x)$的连续点，则$F'(x)=f(x)$。

2. 常见的连续型随机变量的分布

（1）均匀分布

若随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\leqslant x\leqslant b \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则称服X从区间$[a, b]$上的均匀分布，简记为$X\sim U(a, b)$。

其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a<x<b \\ 1 & x>b\end{cases}$$

（2）指数分布

若随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

其中$\lambda>0$为常数，则称X服从参数为λ的指数分布，简记为$X\sim E(\lambda)$。其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

（3）正态分布

① 一般正态分布。

若随机变量的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty<x<+\infty$$

其中μ，σ^2为常数，$-\infty<\mu<+\infty$，$\sigma>0$则称X服从参数为μ，σ^2的正态分布，简记为$X\sim N(\mu, \sigma^2)$。

正态分布的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt, \quad -\infty<x<+\infty$$

② 标准正态分布。

$\mu=0$，$\sigma=1$时的正态分布，称为标准正态分布，其密度函数和分布函数分别记为$\varphi(x)$和$\Phi(x)$。

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}，-\infty<x<+\infty$$

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t，-\infty<x<+\infty$$

$\varphi(x)$有以下性质：

（Ⅰ）$\varphi(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$；

（Ⅱ）$\varphi(x)=\varphi(-x)$。

$\Phi(x)$有以下性质：

（Ⅰ）$\Phi(0)=\frac{1}{2}$；

（Ⅱ）$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$。

③ 一般正态分布与标准正态分布的关系。

设$X\sim N(\mu，\sigma^2)$，则有

（Ⅰ）$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$；

（Ⅱ）$P(a<X\leqslant b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$；

（Ⅲ）$P(X>a)=1-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$；

（Ⅳ）$Y=\frac{x-\mu}{\sigma}\sim N(0，1)$。

3. 连续型随机变量函数的概率密度

（1）公式法

若$X\sim f_x(x)$，$g(x)$是一严格单调且可导的函数，值域为$[\alpha，\beta]$，$g'(x)\neq 0$，反函数为$x=h(y)$，则$Y=g(x)$的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left(h(y)\right)\left|h'(y)\right| & \alpha<x<\beta \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

（2）分布函数法

先求出 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P\big(g(X)\leqslant y\big)$$

再求出概率密度为

$$f_Y(y)=F_Y{}'(y)$$

（3）几个重要的结论

（Ⅰ）$X\sim N(\mu，\sigma^2)$，$Y=aX+b\sim N(a\mu+b，a^2\sigma^2)$；

（Ⅱ）$X\sim U[a，b]$，$Y=cX+d\sim U[ac+d，bc+d]$；

（Ⅲ）$X\sim N(0，1)$，$Y=X^2\sim\chi^2(1)$。

【典型例题】

例 1　设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}ax^3 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & 其他\end{cases}$，则常数 $a=$（　　）。

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. 3　　D. 4

【解】选 D。

例 2　设随机变量X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}x & 0<x\leqslant 1\\ 2-x & 1<x\leqslant 2\\ 0 & 其他\end{cases}$，则 $P\{0.2<X<1.2\}=$（　　）。

A. 0.5　　B. 0.6　　C. 0.66　　D. 0.7

【解】选 C。

例 3　下列函数中可作为某随机变量的概率密度的是（　　）。

A. $\begin{cases}\dfrac{100}{x^2} & x>100\\ 0 & x\leqslant 100\end{cases}$　　B. $\begin{cases}\dfrac{10}{x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$

C. $\begin{cases}-1 & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 0 & 其他\end{cases}$　　D. $\begin{cases}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}\\ 0 & 其他\end{cases}$

【解】选 A。

例 4　设随机变量 X 在$[-1，2]$上服从均匀分布，则随机变量 X 的概率密度 $f(x)$为（　　）。

A. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & -1\leqslant x\leqslant 2\\ 0 & 其他\end{cases}$　　B. $f(x)=\begin{cases}3 & -1\leqslant x\leqslant 2\\ 0 & 其他\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases}1 & -1\leqslant x\leqslant 2\\ 0 & 其他\end{cases}$　　　D. $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3} & -1\leqslant x\leqslant 2\\ 0 & 其他\end{cases}$

【解】选 A。

例 5　设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}Ax^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & 其他\end{cases}$，则常数 A=________。

【解】3。

例 6　设连续型随机变量 $X\sim N(1，4)$，则 $\dfrac{X-1}{2}\sim$______。

【解】$N(0，1)$。

例 7　设随机变量 X 服从区间[0，5]上的均匀分布，则 $P\{X\leqslant 3\}=$__________。

【解】$\dfrac{3}{5}$。

例 8　设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \sin x & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}\\ 1 & x\geqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，其概率密度为 $f(x)$，则 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$=________。

【解】$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{4} & -2<x<2\\ 0 & 其他\end{cases}$，则 $P\{-1<X<1\}=$（　　）。

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. 1

2. 设随机变量 $X\sim N(1，4)$，$Y=2X+1$，则 Y 所服从的分布为（　　）。

A. $N(3，4)$　　B. $N(3，8)$　　C. $N(3，16)$　　D. $N(3，17)$

3. 设随机变量 X 在区间[2，4]上服从均匀分布，则 $P\{2<X<3\}=$（　　）。

A. $P\{3.5<X<4.5\}$　B. $P\{1.5<X<2.5\}$　C. $P\{2.5<X<3.5\}$　D. $P\{4.5<X<5.5\}$

4. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{x^2} & x>1\\ 0 & x\leqslant 1\end{cases}$，则常数 c 等于（　　）。

A. -1　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

5. 设随机变量 X 的取值范围是$(-1，1)$，以下函数可作为 X 的概率密度的是（　　）。

A. $f(x)=\begin{cases}x & -1<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$　　B. $f(x)=\begin{cases}x^2 & -1<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & -1<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$　　D. $f(x)=\begin{cases}2 & -1<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

6. 设随机变量 $X\sim N(1，4)$，$\varPhi(1)=0.8413,\varPhi(0)=0.5$，则事件$\{1\leqslant X\leqslant 3\}$的概率为（　　）。

A. 0.1385　　B. 0.2413　　C. 0.2934　　D. 0.3413

7. 下列各函数中，可作为某随机变量概率密度的是（　　）。

A. $f(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$　　B. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases}3x^2 & 0<x<1\\ -1 & \text{其他}\end{cases}$　　D. $f(x)=\begin{cases}4x^3 & -1<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

8. 某种电子元件的使用寿命 X（单位：小时）的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{100}{x^2} & x\geqslant 100\\ 0 & x<100\end{cases}$，任取一只电子元件，则它的使用寿命在 150 小时以内的概率为（　　）。

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

9. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}c\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$，则常数 c 等于（　　）。

A. $-\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{1}{5}$　　C. 1　　D. 5

10. 设随机变量 X 服从参数为 3 的指数分布，其分布函数记为 $F(x)$，则 $F\left(\dfrac{1}{3}\right)=$（　　）。

A. $\dfrac{1}{3\mathrm{e}}$　　B. $\dfrac{\mathrm{e}}{3}$　　C. $1-\mathrm{e}^{-1}$　　D. $1-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-1}$

11. 设函数 $f(x)$ 在$[a，b]$上等于 $\sin x$，在此区间外等于零，若 $f(x)$ 可以作为某连续型随机变量的概率密度，则区间$[a，b]$应为（　　）。

A. $[-\frac{\pi}{2}，0]$　　B. $[0，\frac{\pi}{2}]$　　C. $[0，\pi]$　　D. $[0，\frac{3\pi}{2}]$

12. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} x & 0<x\leqslant 1 \\ 2-x & 1<x\leqslant 2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，则 $P(0.2<X<1.2)=$（　　）。

A. 0.5　　B. 0.6　　C. 0.66　　D. 0.7

二、填空题

1. 设随机变量 $X\sim N(2，2^2)$，则 $P\{X\leqslant 0\}=$__________。（附：$\Phi(1)=0.8413$）

2. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 1-e^{-3x} & x>0 \\ 0 & x\leqslant 0 \end{cases}$，则当 $x>0$ 时，X 的概率密度 $f(x)=$__________。

3. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} a-e^{-2x} & x>0 \\ 0 & x\leqslant 0 \end{cases}$，则常数 $a=$__________。

4. 设 $X\sim N(1,4)$，已知标准正态分布函数值 $\Phi(1)=0.8413$，为使 $P\{X<a\}<0.8413$，则常数 $a<$__________。

5. 已知随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $P\{X=0\}=e^{-1}$，则 $\lambda=$__________。

6. 随机变量 X 服从 $N(1，4)$，$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，且 $\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(2)=0.9772$，则 $P\{|X|<3\}=$__________。

7. 已知 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0 & x\leqslant -6 \\ \frac{x+6}{12} & -6<x<6 \\ 1 & x\geqslant 6 \end{cases}$，则当 $-6<x<6$ 时，X 的概率密度 $f(x)=$__________。

8. 设随机变量 X 服从区间 $[0，10]$ 上的均匀分布，则 $P(X>4)=$__________。

9. 设随机变量 $X\sim U(-1，1)$，则 $P\left\{|X|\leqslant\frac{1}{2}\right\}=$________。

10. 设随机变量 $X\sim N(0，4)$，则 $P\{X\geqslant 0\}=$________。

11. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=ce^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$，则 $c=$__________。

12. 随机变量 X 分布函数 $F(x)=\begin{cases}0 & x<10\\ 1-\dfrac{10}{x} & x\geqslant 10\end{cases}$，则当 $x\geqslant 10$ 时，X 的概率密度 $f(x)=$ ________。

13. 设随机变量 $X\sim U(0,5)$，且 $Y=2X$，则当 $0\leqslant y\leqslant 10$ 时，Y 的概率密度 $f_Y(y)=$ ________。

三、计算题

1. 设随机变量 X 服从参数为 3 的指数分布。试求：

（1）$Y=\mathrm{e}^X$ 的概率密度；

（2）$P\{1\leqslant Y\leqslant 2\}$。

2. 设顾客在某银行窗口等待服务的时间 X（单位：分钟）具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}} & x>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务，若超过 9 分钟，他就离开。

（1）求该顾客未等到服务而离开窗口的概率 $P\{X>9\}$；

（2）若该顾客一个月内需要去银行 5 次，以 Y 表示他未等到服务而离开窗口的次数，即事件 $\{X>9\}$ 在 5 次中发生的次数，试求 $P\{Y=0\}$。

3. 司机通过某高速路收费站等候的时间 X（单位：分钟）服从参数为 $\lambda=\dfrac{1}{5}$ 的指数分布。

（1）求某司机在此收费站等候时间超过 10 分钟的概率 p；

（2）若该司机一个月要经过此收费站两次，用 Y 表示等候时间超过 10 分钟的次数，写出 Y 的分布律，并求 $P\{Y\geqslant 1\}$。

4. 甲在上班路上所需的时间（单位：分）$X\sim N(50,100)$。已知上班时间为早晨 8 时，他每天 7 时出门，试求：

（1）甲迟到的概率；

（2）某周（以五天计）甲最多迟到一次的概率。

（$\varPhi(1)=0.8413$，$\varPhi(1.96)=0.9750$，$\varPhi(2.5)=0.9938$）

5. 设随机变量 X 概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & x\geqslant 1\\ 0 & x<1\end{cases}$，求：

（1）X 的分布函数 $F_X(x)$；

（2）$P\left\{\frac{1}{2} < X \leqslant 3\right\}$；

（3）令 $Y = 2X$，求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$。

6. 某地抽样调查结果表明，某次统考中，考生的数学成绩（百分制）X 服从正态分布 $X \sim N(72, \sigma^2)$，且 96 分以上的考生占考生总数的 2.3%.试求考生的数学成绩在 60～84 分的概率。（已知 $\Phi(1) = 0.8413$，$\Phi(2) = 0.977$）

7. 某地区年降雨量 X（单位：mm）服从正态分布 $N(1000, 100^2)$，设各年降雨量相互独立，求从今年起连续 10 年内有 9 年降雨量不超过 1250mm，而有一年降雨量超过 1250mm 的概率。（取小数点后四位，$\Phi(2.5) = 0.9938$，$\Phi(1.96) = 0.975$）

【参考答案】

一、单项选择题

1.～5. ACCDC　6.～10. DABBC　11.～12. BC

二、填空题

1.～5.　0.1587；$3e^{-3x}$；1；3；1；

6.～10.　0.8195；$\frac{1}{12}$；$\frac{3}{5}$；$\frac{1}{2}$；$\frac{1}{2}$；

11.～13.1；$\frac{10}{x^2}$；$\frac{1}{10}$

三、计算题

1.（1）$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{3}{y^4} & y > 1 \\ 0 & y \leqslant 1 \end{cases}$；（2）$\frac{7}{8}$。

2.（1）e^{-3}；（2）$\left(1 - e^{-3}\right)^5$。

3.（1）e^{-2}；$2e^{-2} - e^{-4}$。

4.（1）0.1587；0.8190。

5.（1）$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x} & x \geqslant 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$；（2）$\frac{2}{3}$；（3）$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{y^2} & y \geqslant 2 \\ 0 & y < 2 \end{cases}$。

6. 0.6826。

7. 0.3485。

【课后练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设随机变量X的概率密度为$f(x)$，且$f(-x)=f(x)$，$F(x)$是X的分布函数，则对任意的实数a，有（　　）。

A. $F(-a)=1-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$　　B. $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

C. $F(-a)=F(a)$　　D. $F(-a)=2F(a)-1$

2. 已知连续型随机变量 X 服从区间$[a，b]$上的均匀分布，则概率$P\left\{X<\frac{2a+b}{3}\right\}=$（　　）。

A. 0　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 1

3. 设随机变量$X\sim N(1,4)$，$F(x)$为X的分布函数，$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则$F(3)=$（　　）。

A. $\Phi(0.5)$　　B. $\Phi(0.75)$　　C. $\Phi(1)$　　D. $\Phi(3)$

4. 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}2x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & 其他\end{cases}$，则$P\{0\leqslant X\leqslant \frac{1}{2}\}=$（　　）。

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

5. 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}cx+\frac{1}{2} & -1\leqslant x\leqslant 0\\ 0 & 其他\end{cases}$，则常数$c=$（　　）。

A. -3　　B. -1　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. 1

6. 设下列函数的定义域均为（$-\infty$，$+\infty$），则其中可作为概率密度的是（　　）。

A. $f(x)=-\mathrm{e}^{-x}$　　B. $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$　　C. $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$　　D. $f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}$

7. 设随机变量$X\sim N(2，3^2)$，$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则$P\{2<X\leqslant 4\}=$（　　）。

A. $\Phi\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{2}$　　B. $1-\Phi\left(\frac{2}{3}\right)$　　C. $2\Phi\left(\frac{2}{3}\right)-1$　　D. $\Phi\left(\frac{2}{3}\right)$

8. 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}K(4x-2x^2) & 1<x<2\\ 0 & 其他\end{cases}$，则$K=$（　　）。

A. $\frac{5}{16}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{5}$

9. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & 3<x<6\\ 0 & 其他\end{cases}$，则 $P\{3<X\leqslant 4\}=$（　　）。

A. $P\{1<X\leqslant 2\}$　B. $P\{4<X\leqslant 5\}$　C. $P\{3<X\leqslant 5\}$　D. $P\{2<X\leqslant 7\}$

10. 已知随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 X 的分布函数为（　　）。

A. $F(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$　B. $F(x)=\begin{cases}1-\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$　D. $F(x)=\begin{cases}1+e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$

二、填空题

1. 设随机变量 $X\sim N(1,1)$，为使 $X+C\sim N(0,1)$，则常数 C=_________。

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}24x^2 & 0\leqslant x\leqslant c\\ 0 & 其他\end{cases}$，则常数 c=_________。

3. 若随机变量 X 服从均值为 2，方差为 σ^2 的正态分布，且 $P\{2\leqslant X\leqslant 4\}=0.3$，则 $P\{X\leqslant 0\}=$_________。

4. 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & 其他\end{cases}$，则当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，X 的分布函数 $F(x)=$_________。

5. 设随机变量 $X\sim N(1,3^2)$，则 $P\{-2\leqslant X\leqslant 4\}=$_________。(附：$\Phi(1)=0.8413$)

6. 设随机变量 $X\sim N(10,\sigma^2)$，已知 $P(10<X<20)=0.3$，则 $P(0<X<10)$=_________。

7. 设 X 是连续型随机变量，则 $P\{X=5\}$=_________。

8. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-x} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$，则当 $x>0$ 时，X 的概率密度 $f(x)=$_____。

9. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}Ax+1 & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 0 & 其他\end{cases}$，则常数 A=_________。

10. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty<x<+\infty$，则 $P(0<X<1)=$_________。

11. 设随机变量 $X\sim N(0,4^2)$，且 $P\{X>1\}=0.4013$，$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $\Phi(0.25)=$_________。

12. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-2x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$，则 $P\{X\geqslant 2\}=$__________。

13. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-3x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$ 则 $P(x>1)=$__________。

14. 设随机变量 $X\sim N(1,\ 2^2)$，则 $P\{-1\leqslant X\leqslant 3\}=$________。(附：$\Phi(1)=0.8413$)

15. 设随机变量 X 服从区间 $[2,\ \theta]$ 上的均匀分布，且概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & 2\leqslant x\leqslant\theta\\ 0 & 其他\end{cases}$，则 $\theta=$__________。

三、计算题

1. 设某种晶体管的寿命 X（以小时计）的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{100}{x^2} & x>100\\ 0 & x\leqslant 100\end{cases}$$

（1）若一个晶体管在使用 150 小时后仍完好，那么该晶体管使用时间不到 200 小时的概率是多少？

（2）若一个电子仪器中装有 3 个独立工作的这种晶体管，在使用 150 小时内恰有一个晶体管损坏的概率是多少？

2. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}x & 0\leqslant x<1\\ \dfrac{1}{2} & 1\leqslant x<2\\ 0 & 其他\end{cases}$$

求 X 的分布函数 $F(x)$。

3. 由历史记录知，某地区年总降雨量是一个随机变量，且此随机变量 $X\sim N(500,\ 100^2)$（单位：mm）。求：

（1）明年总降雨量为 400～600 mm 的概率；

（2）明年总降雨量小于何值的概率为 0.1。（$\Phi(1)=0.8413,\ \Phi(1.28)\approx 0.9$）。

4. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}cx^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & 其他\end{cases}$，求：

（1）常数 c；

（2）X 的分布函数 $F(x)$；

（3） $P\left\{0<x<\dfrac{1}{2}\right\}$。

【参考答案】

一、单项选择题

1.～5. BBCAB　　6.～10. CACBC

二、填空题

1.～5.　-1； $\dfrac{1}{2}$； 0.2； x； 0.6826；

6.～10.　0.3； 0； e^{-x}； $-\dfrac{1}{2}$； $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$；

11.～15.　0.5987； e^{-4}； e^{-3}； 0.6826； 6

三、计算题

1. 【解】（1） $P\left(X<200 \middle| X>150\right)=\dfrac{P\left(150<X<200\right)}{P\left(X>150\right)}$

$$=\frac{\int_{150}^{200}\frac{100}{x^2}\mathrm{d}x}{\int_{150}^{+\infty}\frac{100}{x^2}\mathrm{d}x}=\frac{-\frac{100}{x}\Big|_{150}^{200}}{-\frac{100}{x}\Big|_{150}^{+\infty}}=\frac{1}{4}$$

（2）先求出一个晶体管在 150 小时内损坏的概率为

$$P\left(X<150\right)=\int_{100}^{150}\frac{100}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

设 Y 表示电子仪器中 3 个晶体管在使用 150 小时内损坏的个数，则

$$Y\sim B\left(3,\ \frac{1}{3}\right)$$

于是所求概率为

$$P\left(Y=1\right)=C_3^1\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

2. 【解】X 的分布函数为

$$F\left(x\right)=\begin{cases}0 & x<0\\ \int_0^x x\mathrm{d}x & 0\leqslant x<1\\ \int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^x\frac{1}{2}\mathrm{d}x & 1\leqslant x<2\\ 1 & x\geqslant 2\end{cases}=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2}x^2 & 0\leqslant x<1\\ \frac{1}{2}x & 1\leqslant x<2\\ 1 & x\geqslant 2\end{cases}$$

3. **【解】**（1）由条件，明年总降雨量为 400～600mm 的概率为

$$P(400\leqslant X\leqslant 600)=P\left(\frac{400-500}{100}\leqslant\frac{X-500}{100}\leqslant\frac{600-500}{100}\right)$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=0.6826$$

（2）设该值为 a，则 $P(X<a)=0.1$

即 $$P(X<a)=\Phi\left(\frac{a-500}{100}\right)=0.1$$

由 $$\Phi\left(\frac{a-500}{100}\right)=0.1<0.5，\frac{a-500}{100}<0$$

从而 $$\Phi\left(-\frac{a-500}{100}\right)=0.9\approx\Phi(1.28)$$

因此 $$\frac{a-500}{100}\approx-1.28，a\approx 372$$

4. **【解】**（1）由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 cx^2\mathrm{d}x=\frac{c}{3}$，得 $c=3$

（2）X 的分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & x<0\\ x^3 & 0\leqslant x<1\\ 1 & x\geqslant 1\end{cases}$$

（3）$P\left\{0<x<\frac{1}{2}\right\}=F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=\frac{1}{8}$

第三章　多维随机变量及其概率分布

【考核要求】

理解二维离散型随机变量的分布律及其性质；理解二维连续型随机变量的概率密度函数及其性质；理解边缘分布律、边缘概率密度函数的概念，掌握边缘分布律、边缘概率密度函数的求解方法；能判断随机变量的独立性；了解两个随机变量的和的分布的求法。

重点：联合分布律，概率密度函数，边缘分布律，边缘概率密度函数，随机变量的独立性。

难点：边缘分布律，边缘概率密度函数，两个独立随机变量的和的分布。

考点 1　二维离散型随机变量

【考点内容】

1. 二维随机变量

n 维随机变量（或向量）：n 个随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 构成的整体 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 称为一个 n 维随机变量（或向量）。

一般二维随机变量记作 (X, Y)。

2. 二维随机变量的分布函数

（1）定义

$$F(x, y) = P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

称为 X 和 Y 的联合分布函数或 (X, Y) 的分布函数。

其中，分量 X 的分布函数称为 (X, Y) 关于 X 的边缘分布函数，记为 $F_X(x)$，分量 Y 的分布函数称为 (X, Y) 关于 Y 的边缘分布函数，记为 $F_Y(y)$。且

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y)$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y)$$

（2）性质

① $0\leqslant F(x, y)\leqslant 1$;

② $F(x, y)$ 分别对 x 和 y 单调不减；

③ $F(x, y)$ 关于 x 右连续，关于 y 也右连续；

④ $F(-\infty, y)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x, y)=0$；

$F(x, -\infty)=\lim\limits_{y\to-\infty}F(x, y)=0$；

$F(-\infty, -\infty)=\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x, y)=0$；

$F(+\infty, +\infty)=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x, y)=1$。

⑤ 对任意固定的 $x_1<x_2$，$y_1<y_2$

有
$$F(x_2, y_2)-F(x_2, y_1)-F(x_1, y_2)+F(x_1, y_1)\geqslant 0$$

3. 二维离散型随机变量

（1）定义

若二维随机变量 (X, Y) 只取有限多对或可列无穷多对 (x_i, y_j)，$(i, j=1, 2, \cdots)$，则称 (X, Y) 为二维离散型随机变量。

（2）(X, Y) 的分布律

设二维随机变量 (X, Y) 的所有可能取值为 (x_i, y_j)，$(i, j=1, 2, \cdots)$，(X, Y) 在各个可能取值的概率为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P_{ij}\qquad i, j=1, 2, \cdots$$

称 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=P_{ij}$ （$i, j=1, 2, \cdots$）为 (X, Y) 的分布律.

(X, Y) 的分布律还可以写成如下列表形式：

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}		p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

(X, Y) 的分布律具有下列性质：

① $P_{ij} \geqslant 0(i, j=1, 2, \cdots)$；

② $\sum_i \sum_j P_{ij} = 1$。

（3）边缘分布律

对于离散型随机变量(X, Y)，分量X（或Y）的分布律称为(X, Y)关于X（或Y）的边缘分布律，记为$P_{i\bullet}(i=1, 2, \cdots)$或$P_{\bullet j}(j=1, 2, \cdots)$，它可由$(X, Y)$的分布律求出。

(X, Y)关于X的边缘分布律为

$$P_{i\bullet} = P\{X = x_i\} = \sum_j p_{ij} \quad (i=1, 2, \cdots)$$

(X, Y)关于Y的边缘分布律为

$$P_{\bullet j} = P\{Y = y_j\} = \sum_i p_{ij} \quad (i=1, 2, \cdots)$$

注意：由联合分布可确定边缘分布，但一般情况下，由两个边缘分布不能确定联合分布。

4. 随机变量的独立性

（1）两个随机变量独立性的定义

设$F(x, y)$，$F_X(x)$和$F_Y(y)$分别是二维随机变量(X, Y)的分布函数和两个边缘分布函数.若对任意实数x, y

有
$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

则称X与Y相互独立.

随机变量X与Y相互独立，即对任意实数x, y，事件$\{X \leqslant x\}$与$\{Y \leqslant y\}$相互独立。

（2）二维离散型随机变量的独立性

设(X, Y)为离散型随机变量，其分布律为

$$P_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\} \quad i, j=1, 2, \cdots$$

边缘分布律为

$$P_{i\bullet} = P\{X = x_i\} = \sum_j p_{ij} \quad i=1, 2, \cdots$$

$$P_{\bullet j} = P\{Y = y_j\} = \sum_i p_{ij} \quad j=1, 2, \cdots$$

X与Y相互独立的充要条件为

对一切i, j有

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} P\{Y = y_j\}$$

X与Y相互独立时，由两个边缘分布可确定联合分布。

【典型例题】

例 1　设二维随机变量（X，Y）的分布律为

$X\backslash Y$	-1	0	1
0	0.1	0.3	0.2
1	0.2	0.1	0.1

则 $P\{X+Y=0\}=$（　　）。

A. 0.2　　B. 0.3　　C. 0　　D. 0.7

【解】 选 C。

例 2　设二维随机变量（X，Y）的联合分布律为

$X\backslash Y$	0	5
0	1/4	1/6
2	1/3	1/4

则 $P\{XY=0\}=$（　　）。

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{5}{12}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. 1

【解】 选 C。

例 3　设随机变量 X 与 Y 独立同分布，它们取 -1，1 两个值的概率分别为 $\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{3}{4}$，则 $P\{XY=-1\}=$（　　）。

A. $\dfrac{1}{16}$　　B. $\dfrac{3}{16}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{3}{8}$

【解】 选 D。

例 4　设二维随机变量（X，Y）的分布函数为 $F(x, y)$，则 $F(x, +\infty)=$（　　）。

A. 0　　B. $F_X(x)$　　C. $F_Y(y)$　　D. 1

【解】 选 B。

例 5　设二维随机变量（X，Y）的联合分布函数为 $F(x, y)$。其联合概率分布为

$X\backslash Y$	0	1	2
-1	0.2	0.1	0.1
0	0	0.3	0
2	0.1	0	0.2

则 $F(0, 1)=$（　　）。

A. 0.2　　B. 0.6　　C. 0.7　　D. 0.8

【解】 选 B。

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设二维随机变量（X，Y）的分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.1	0.2
1	0.3	0.4

设 $p_{ij}=P\{X=i, Y=j\}$，i，$j=0, 1$，则下列各式中错误的是（　　）。

A. $p_{00}<p_{01}$　　B. $p_{10}<p_{11}$　　C. $p_{00}<p_{11}$　　D. $p_{10}<p_{01}$

2. 设二维随机变量（X，Y）的分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.2	0
1	0.3	0.1	0.1
2	0.1	0	0.1

则 $P\{X=Y\}=$（　　）。

A. 0.3　　B. 0.5　　C. 0.7　　D. 0.8

3. 已知 X，Y 的联合概率分布如下所示：

$X \backslash Y$	-1	1	2
0	0	1/6	5/12
1/3	1/12	0	0
2	1/3	0	0

$F(X, Y)$ 为其联合分布函数，则 $F\left(0, \dfrac{1}{3}\right)=$（　　）。

A. 0　　B. $\dfrac{1}{12}$　　C. $\dfrac{1}{6}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

4. 设二维随机变量（X，Y）的分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	1/10	2/10	2/10
2	3/10	1/10	1/10

则 $P\{XY=2\}=$（　　）。

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{3}{10}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{3}{5}$

5. 设随机变量 X，Y 相互独立，其联合分布律如下

$X \backslash Y$	1	2	3
1	1/6	1/9	1/18
2	1/3	α	β

则有（　　）。

A. $\alpha=\frac{1}{9}$，$\beta=\frac{2}{9}$　　B. $\alpha=\frac{2}{9}$，$\beta=\frac{1}{9}$

C. $\alpha=\frac{1}{3}$，$\beta=\frac{2}{3}$　　D. $\alpha=\frac{2}{3}$，$\beta=\frac{1}{3}$

二、填空题

1. 设二维随机向量（X，Y）的联合分布律为

$Y \backslash X$	−1	0	1
−1	0.2	0.1	0
0	0	0.2	0.2
1	0.1	0.2	0

$P\{X+Y=0\}=$____________。

2. 设（X，Y）的分布律为

$X \backslash Y$	−1	1	2
1	$\frac{1}{15}$	α	$\frac{1}{15}$
2	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$

则 $\alpha=$________。

3. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，它们的分布律分别为

X	−1	0	1
P	1/3	1/4	5/12

Y	−1	0
P	1/4	3/4

则 $P\{X+Y=1\}=$____________。

4. 随机变量（X，Y）的联合分布律如下所示：

$X \backslash Y$	1	2
1	$1/6$	$1/9$
2	$1/2$	α

则 $\alpha =$____________。

5. 设二维随机变量$(X，Y)$的分布律为

$X \backslash Y$	0	5
0	$1/4$	$1/6$
2	$1/3$	$1/4$

则 $P\{XY=0\}=$____________。

6. 设二维随机变量（X，Y）的分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

则 $P\{Y=2\}=$____________。

三、计算题

1. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X，Y 的分布律分别为

X	0	1
P	$1/4$	$3/4$

Y	1	2
P	$2/5$	$3/5$

试求：（1）二维随机变量（X，Y）的分布律；

（2）随机变量 $Z=XY$ 的分布律。

2. 设二维随机变量（X，Y）的分布律为

$X \backslash Y$	1	2
1	$1/9$	$2/9$
2	$2/9$	$4/9$

试问：X 与 Y 是否相互独立？为什么？

3. 设二维随机变量$(X，Y)$只能取下列数组中的值：$(0，0)$，$(-1，1)$，$(-1，\frac{1}{3})$，$(2，0)$，且取这些值的概率依次为$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{12}$，$\frac{5}{12}$。

（1）写出$(X，Y)$的分布律；

（2）分别求$(X，Y)$关于 X，Y 的边缘分布律。

4. 设二维随机变量（X，Y）的联合分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2
1	0.1	0.2	0.1
2	a	0.1	0.2

试求：（1）a 的值；

（2）（X，Y）分别关于 X 和 Y 的边缘分布律；

（3）X 与 Y 是否独立？

（4）$X+Y$ 的分布律。

【参考答案】

一、单项选择题

1.～5. DADCB

二、填空题

1.～6. 0.3；$\dfrac{1}{10}$；$\dfrac{5}{16}$；$\dfrac{2}{9}$；$\dfrac{3}{4}$；$\dfrac{1}{4}$

三、计算题

1.（1）

$X \backslash Y$	1	2
0	1 / 10	3 / 20
1	3 / 10	9 / 20

（2）

X	0	1	2
P	1 / 4	3 / 10	9 / 20

2. 独立.

3.（1）

$X \backslash Y$	0	1/3	1
–1	0	1/12	1/3
0	1/6	0	0
2	5/12	0	0

（2）

X	-1	0	2
P	$5/12$	$1/6$	$5/12$

Y	0	$1/3$	1
P	$7/12$	$1/12$	$1/3$

4.（1） $a=0.3$

（2）

X	0	1	2
P	0.4	0.3	0.3

Y	1	2
P	0.4	0.6

（3）不独立

（4）

$X+Y$	1	2	3	4
P	0.1	0.5	0.2	0.2

【课后练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设二维随机变量（X，Y）的分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$1/12$	$1/6$	$1/6$
1	$1/12$	$1/12$	0
2	$1/6$	$1/12$	$1/6$

则 $P\{XY=0\}=$（　　）。

A. $\dfrac{1}{12}$　　B. $\dfrac{1}{6}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

2. 设二维随机变量(X，Y)的分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.1	0.1
1	a	b

且 X 与 Y 相互独立，则下列结论正确的是（　　）。

A. $a=0.2$，$b=0.6$　　B. $a=-0.1$，$b=0.9$

C. $a=0.4$，$b=0.4$　　D. $a=0.6$，$b=0.2$

3. 设(X，Y)的概率分布如下表所示

$X \backslash Y$	0	−1
0	1/15	p
1	q	1/5
2	1/5	3/10

当 X 与 Y 相互独立时，$(p，q)$=（　　）。

A. $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{15}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{15}, \frac{1}{5}\right)$　　C. $\left(\frac{1}{10}, \frac{2}{15}\right)$　　D. $\left(\frac{2}{15}, \frac{1}{10}\right)$

4. 设随机变量（X，Y）只取如下数组中的值：（0，0），（−1，1），$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$，(2，0)，且相应的概率依次为$\frac{1}{2c}$，$\frac{1}{c}$，$\frac{1}{4c}$，$\frac{5}{4c}$，则 c 的值为（　　）。

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

5. 设二维随机变量$(X，Y)$的分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3
−1	0.2	0.1	0.1
0	0.1	0.1	0.2
1	0.1	0.1	0

则 $P\{X+Y \leqslant 1\}=$（　　）。

A. 0.4　　B. 0.3　　C. 0.2　　D. 0.1

6. 设二维随机变量$(X，Y)$的分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.2	0
1	0.3	0.1	0.1
2	0.1	0	0.1

则 $P(X=Y)=$（　　）。

A. 0.3　　B. 0.5　　C. 0.7　　D. 0.8

二、填空题

1. 设二维随机变量$(X，Y)$的分布律如下，则 $P(X<1，Y \leqslant 2)=$______。

$X \backslash Y$	1	2	3
0	0.2	0.1	0.15
1	0.3	0.15	0.1

2. 设随机变量(X，Y)的概率分布如下，则 $P\{X=Y\}$ 的概率为________。

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/4	1/6	1/8
1	1/4	1/8	1/12

3. 设二维随机变量(X，Y)的分布律如下所示，则 $P\{X=0，Y=1\}$______。

$X \backslash Y$	0	1
1	0.1	0.1
2	0.8	0

4. 设二维随机变量(X，Y)的分布律如下所示，则 $P\{Y=2\}=$______。

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0	0.2	0.3
1	0.1	0.2	0.2

5. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，它们的分布律分别为

X	-1	0	1
P	$1/3$	$1/4$	$5/12$

Y	-1	1
P	$1/4$	$3/4$

则 $P\{X+Y=0\}=$___________。

6. 设二维随机变量(X，Y)的分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.3	0.1	0.2
1	0	0.1	0.3

则 $P\{X=Y\}=$___________。

7. 设二维随机变量(X，Y)的分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.15	0
1	0.25	0.2	0.1
2	0.1	0	0.1

则 $P\{X=Y\}=$_____________。

三、计算题

1. 设二维随机变量$(X，Y)$的分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.2	0.1	0
1	0.2	0.1	0.4

（1）求$(X，Y)$分别关于X，Y的边缘分布律；

（2）试问X与Y是否相互独立，为什么？

2. 设二维随机变量$(X，Y)$的分布律为

$X \backslash Y$	−1	0	1
0	0.2	0.1	0.3
1	0.1	0.2	0.1

求：（1）$(X，Y)$关于X的边缘分布律；

（2）$X+Y$的分布律。

【参考答案】

一、单项选择题

1.～6. DCCBAA

二、填空题

1.～7. 0.3；$\dfrac{3}{8}$；0.1；0.5；$\dfrac{7}{24}$；0.4；0.4

三、计算题

1.**【解】**（1）关于X的边缘分布律为

X	0	1
P	0.3	0.7

关于Y的边缘分布律为

Y	0	1	2
P	0.4	0.2	0.4

（2）由于

$$P\{X=0，Y=0\}=0.2$$

$$P\{X=0\}=0.3$$
$$P\{Y=0\}=0.4$$

而 $P\{X=0,Y=0\}\neq P\{X=0\}P\{Y=0\}$，故 X 与 Y 不相互独立。

2. 【解】（1）(X, Y)关于 X 的边缘分布律为

X	0	1
P	0.6	0.4

（2）$X+Y$ 的可能取值为-1，0，1，2，即有

$$P(X+Y=-1)=P(X=0, \ Y=-1)=0.2$$
$$P(X+Y=0)=P(X=0, \ Y=0)+P(X=1, \ Y=-1)=0.2$$
$$P(X+Y=1)=P(X=0, \ Y=1)+P(X=1, \ Y=0)=0.5$$
$$P(X+Y=2)=P(X=1, \ Y=1)=0.1$$

$X+Y$ 的分布律为

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.2	0.5	0.1

考点 2　二维连续型随机变量

【考点内容】

1. 二维连续型随机变量及其概率密度

设二维随机变量(X, Y)的分布函数为$F(x, y)$，若存在非负可积函数$f(x, y)$，使得对任意的实数 x，y

有
$$F(x, y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u, v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

则称(X, Y)为二维连续型随机变量，并称$f(x, y)$为(X, Y)的概率密度或 X 与 Y 的联合密度函数。

概率密度$f(x, y)$有以下性质：

① $f(x, y)\geqslant 0$；

② $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$。

反之，任一定义在整个实平面上的二元函数，如果具有以上两条性质，则它必为某二维

连续型随机变量的概率密度。

若 $f(x,\ y)$ 在 $(x,\ y)$ 处连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,\ y)$$

因而 $f(x,\ y)$ 在连续点 $(x,\ y)$ 处，可由分布函数 $F(x,\ y)$ 求出概率密度 $f(x,\ y)$。

如果已知 $(X,\ Y)$ 的概率密度 $f(x,\ y)$，则 $(X,\ Y)$ 在平面区域 D 内取值的概率为

$$P\{(X,\ Y) \in D\} = \iint_D f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2. 边缘分布

对连续型随机变量 $(X,\ Y)$，分量 X（或 Y）的概率密度称为关于 X（或 Y）的边缘概率密度，简称边缘密度，记为 $f_X(x)$（或 $f_Y(y)$）。

边缘概率密度 $f_X(x)$ 或 $f_Y(y)$ 可由 $(X,\ Y)$ 的概率密度 $f(x,\ y)$ 求出：

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y,\quad -\infty < x < +\infty$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x,\quad -\infty < y < +\infty$$

3. 几个重要分布

（1）均匀分布

若 D 为平面内的有界区域，其面积为 S（S>0），$(X,\ Y)$ 的概率密度为

$$f(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{1}{S} & (x,\ y) \in D \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

则称 $(X,\ Y)$ 服从 D 上的均匀分布，记作 $(X,\ Y) \sim U_{\mathrm{D}}$。

（2）二维正态分布

若二维随机变量 $(X,\ Y)$ 的概率密度为

$$f(x,\ y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}}$$

$$-\infty < x < +\infty,\ -\infty < y < +\infty$$

其中，μ_1，μ_2，σ_1^2，σ_2^2，ρ 都是常数，且

$$\sigma_1 > 0,\quad \sigma_2 > 0,\quad |\rho| < 1$$

则称 $(X,\ Y)$ 服从二维正态分布

记为
$$(X,\ Y)\sim N\left(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \rho\right)$$

4. 几个重要结论

（1）若$(X,\ Y)$在矩形区域$D=\left\{(x,\ y)\middle|a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\right\}$上服从均匀分布，则概率密度为
$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)} & (x,\ y)\in D\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

边缘密度为
$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\leqslant x\leqslant b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$
$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c} & c\leqslant y\leqslant d\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

即矩形区域上的均匀分布的边缘分布也是均匀分布。

（2）若$(X,\ Y)$服从二维正态分布$N\left(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \rho\right)$，则边缘密度为
$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$
$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

即二维正态分布的边缘分布为一元正态分布。

5. 二维连续型随机变量的独立性

（1）设二维连续型随机变量$(X,\ Y)$的概率密度为$f(x,\ y)$，$f_X(x)$，$f_Y(y)$，分别为$(X,\ Y)$关于X，Y的边缘概率密度，则X，Y相互独立的充要条件：
$$f(x,\ y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

X，Y相互独立时，由两个边缘密度可确定联合密度。

（2）两个结论

① $(X,\ Y)$服从矩形区域上的均匀分布，则X，Y独立。

② $(X,\ Y)\sim N\left(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \rho\right)$，则$X$，$Y$相互独立的充要条件是$\rho=0$。

【典型例题】

例 1　设二维随机变量（X，Y）的联合概率密度为 $f(x,y)=$

$$\begin{cases} k(x+y) & 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

则 $k=$（　　）。

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

【解】选 B。

例 2　设二维随机变量（X，Y）的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，则 $P(X\geqslant Y)=$（　　）。

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

【解】选 B。

例 3　设二维随机变量（X，Y）的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} 1 & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，则 $P\{X\leqslant\frac{1}{2}\}=$____________。

【解】$\frac{1}{2}$。

例 4　设(X，Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} xy & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，则 X 的边缘概率密度 $f_X(x)=$____________。

【解】$\begin{cases} 2x & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$。

例 5　当 $0<x<1$，$0<y<1$ 时，(X,Y) 的分布函数 $F(x,y)=x^2y^2$，(X,Y) 概率密度记为 $f(x,y)$，则 $f(\frac{1}{4},\frac{1}{4})=$________。

【解】$\frac{1}{4}$。

例 6　设相互独立的随机变量 X，Y 均服从参数为 1 的指数分布，则当 $x>0$，$y>0$ 时，(X，Y)的概率密度 $f(x,y)=$________。

【解】$e^{-(x+y)}$。

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设二维随机变量（X，Y）的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} c & -1<x<1,\ -1<y<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，则常数 c=（　　）。

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 2　　D. 4

2. 设随机变量（X，Y）的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-x}e^{-2y} & x>0,\ y>0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，则 A=（　　）。

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. 2

3. 设二维随机变量（X，Y）的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} 4xy & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，则当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，（X，Y）关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)=$（　　）。

A. $\dfrac{1}{2x}$　　B. $2x$　　C. $\dfrac{1}{2y}$　　D. $2y$

二、填空题

1. 设$(X,Y)\sim N(0,0;1,1;0)$，则(X,Y)关于 X 的边缘概率密度 $f_X(x)=$__________。

2. 设二维随机变量（X，Y）的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} axy & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，则常数 a=__________。

3. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0,\ y>0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，则当 $y>0$ 时，（X，Y）关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)=$ __________。

4. 设二维随机变量（X，Y）概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}(x+y) & 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，则 $f_X(x)=$________。

5. 设随机变量(X,Y)服从区域 D 上的均匀分布，其中区域 D 是直线 $y=x$，$x=1$ 和 x 轴所围成的三角形区域，则(X,Y)的概率密度 $f(x,y)=$ ____________。

6. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} 1 & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，则

$P\left\{X \leqslant \dfrac{1}{2}, Y > \dfrac{1}{2}\right\} =$ ____________。

7. 设(X，Y)的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y} & x>0, y>0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，则 X 的边缘概率密度为 $f_X(x) =$ ____________。

8. 设 X 与 Y 为相互独立的随机变量，其中 X 在(0，1)上服从均匀分布，Y 在(0，2)上服从均匀分布，则(X，Y)的概率密度 $f(x, y) =$ ____________。

9. 设二维随机变量（X，Y）的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，则 $P\{0 \leqslant X \leqslant 1, 0 \leqslant Y \leqslant 1\}=$ ____________。

10. 设随机变量(X，Y)的分布函数为 $F(x, y) = \begin{cases} (1-e^{-0.5x})(1-e^{-0.5y}) & x \geqslant 0, y \geqslant 0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，则 X 的边缘分布函数 $F_X(x) =$ ____________。

11. 设二维随机变量(X，Y)的概率密度 $f(x, y) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$，则($X$，$Y$)关于 X 的边缘概率密度 $f_X(x) =$ ____________。

12. 设二维随机变量(X，Y)的概率密度 $f(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，则 $P\{X+Y \leqslant 1\}=$ ____________。

13. 设二维随机变量(X，Y)的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} axy & 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，则常数 $a=$ ________。

三、计算题

1. 设二维随机变量(X，Y)的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} & 0 \leqslant x \leqslant 1, y>0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，求：

（1）(X，Y)关于 X，Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（2）问 X 与 Y 是否相互独立，并说明理由。

2. 设二维随机变量（X，Y）的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0, y>0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，求：

（1）（X，Y）关于 X 和 Y 的边缘概率密度；

（2）X与Y是否相互独立，为什么？

3. 设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} cxy & 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

试求：（1）常数c；

（2）（X，Y）分别关于X，Y的边缘密度$f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（3）判定X与Y的独立性，并说明理由；

（4）求$P\{X>1,\ Y>1\}$。

【参考答案】

一、单项选择题

1.～3. ADD

二、填空题

1.～4. $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$-\infty<x<+\infty$；4；$e^{-y}$；$\begin{cases} \dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{6} & 0\leqslant x\leqslant 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$；

5.～7. $\begin{cases} 2 & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant x \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$；$\dfrac{1}{4}$；$\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$；

8.～10. $\begin{cases} \dfrac{1}{2} & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$；$\dfrac{1}{4}$；$\begin{cases} 1-e^{-0.5x} & x\geqslant 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$；

11.～13. $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$-\infty<x<+\infty$；$\dfrac{1}{2}$；4

三、计算题

1.（1）$f_X(x)=\begin{cases} 1 & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y} & y>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$；

（2）独立；

2.（1）$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y} & y>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$；

（2）独立；

3.（1）$\frac{1}{4}$；（2）$f_X(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 0 & 其他\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{y}{2} & 0\leqslant y\leqslant 2\\ 0 & 其他\end{cases}$；

（3）独立；（4）$\frac{9}{16}$

【课后练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设随机变量 X，Y 相互独立，且 $X\sim N(2,1)$，$Y\sim N(1,1)$，则（　　）。

A. $P\{X-Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$　　B. $P\{X-Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$

C. $P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$　　D. $P\{X+Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$

2. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4} & 0<x<2,0<y<2\\ 0 & 其他\end{cases}$，则 $P\{0<X<1,0<Y<1\}=$（　　）。

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. 1

3. 设(X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}k(x+y) & 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\\ 0 & 其他\end{cases}$，则 k=（　　）。

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 3

4. 设二维随机变量$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，则 $Y\sim$（　　）。

A. $N(\mu_1,\sigma_1^2)$　　B. $N(\mu_1,\sigma_2^2)$

C. $N(\mu_2,\sigma_1^2)$　　D. $N(\mu_2,\sigma_2^2)$

5. 设（X，Y）的联合概率密度为 $f(x,y)$，则 $P(X>1)=$（　　）。

A. $\int_{-\infty}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$　　B. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$

C. $\int_{-\infty}^{1}f(x,y)\mathrm{d}x$　　D. $\int_{1}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$

6. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}c & 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 2\\ 0 & 其他\end{cases}$，则常数 c=（　　）。

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. 4

7. 设随机变量 $X \sim N\left(-1, 2^2\right)$，$Y \sim N\left(-2, 3^2\right)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $X-Y \sim$（　　）。

A. $N(-3, -5)$　　B. $N(-3, 13)$　　C. $N(1, \sqrt{13})$　　D. $N(1, 13)$

8. 二维随机变量（X，Y）的联合概率密度为 $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & x^2+y^2<1 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，则随机变量 X 与 Y 为（　　）。

A. 独立同分布　　B. 独立不同分布

C. 不独立同分布　　D. 不独立不同分布

9. 设随机变量 $X \sim N(-1, 3)$，$Y \sim N(1, 2)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $X+2Y \sim$（　　）。

A. $N(1, 10)$　　B. $N(1, 11)$　　C. $N(1, 5)$　　D. $N(1, 7)$

10. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，它们的概率密度分别为 $f_X(x)$，$f_Y(y)$，则(X, Y)的概率密度为（　　）。

A. $\dfrac{1}{2}\left[f_X(x)+f_Y(y)\right]$　　B. $f_X(x)+f_Y(y)$

C. $\dfrac{1}{2}f_X(x)f_Y(y)$　　D. $f_X(x)f_Y(y)$

11. 设二维随机变量(X, Y)服从区域 D：$x^2+y^2 \leqslant 1$ 上的均匀分布，则(X, Y)的概率密度为（　　）。

A. $f(x, y)=1$　　B. $f(x, y)=\begin{cases}1 & (x, y) \in D \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

C. $f(x, y)=\dfrac{1}{\pi}$　　D. $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & (x, y) \in D \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

二、填空题

1. 设随机变量 X，Y 相互独立，且 $P\{X \leqslant 1\}=\dfrac{1}{2}$，$P\{Y \leqslant 1\}=\dfrac{1}{3}$，则 $P\{X \leqslant 1, Y \leqslant 1\}=$ ________。

2. 设随机变量 X 和 Y 的联合密度为 $f(x, y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x-y} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，则 $P\{X>1, Y>1\}=$ ________。

3. 设二维随机变量（X，Y）的概率密度为 $f(x, y)=\begin{cases}6x & 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，则 Y 的边缘概率密度为________。

4. 设(X, Y)的联合分布函数为$F(x, y)=\begin{cases}(1-e^{-3x})(1-e^{-4y}) & x>0, y>0 \\ 0 & 其他\end{cases}$，则$(X, Y)$关于$X$的边缘概率密度$f_X(x)=$__________。

5. 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为$f(x, y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0<x<2, 0<y<1 \\ 0 & 其他\end{cases}$，则$P\{X+Y\leqslant 1\}=$__________。

6. 设随机变量X，Y相互独立，且$P(X\leqslant 1)=\frac{1}{2}$，$P(Y\leqslant 1)=\frac{1}{3}$，则$P(X\leqslant 1, Y\leqslant 1)=$__________。

7. 设二维随机变量（X，Y）的概率密度为$f(x, y)=\begin{cases}12e^{-(3x+4y)} & x>0, y>0 \\ 0 & 其他\end{cases}$，则（$X$，$Y$）的分布函数$F(x, y)=$__________。

8. 设二维随机变量（X，Y）的概率密度为$f(x, y)=\begin{cases}\frac{1}{3}(x+y) & 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 1 \\ 0 & 其他\end{cases}$，则（$X$，$Y$）关于$X$的边缘概率密度$f_X(x)=$__________。

9. 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为$f(x, y)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1 \\ 0 & 其他\end{cases}$，则$P\{X+Y>1\}=$__________。

10. 已知当$0<x<1$, $0<y<1$时，随机变量(X, Y)的分布函数$F(x, y)=x^2y^2$，(X, Y)概率密度记为$f(x, y)$，则$f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)=$__________。

11. 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为$f(x, y)=\begin{cases}8xy & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1 \\ 0 & 其他\end{cases}$，随机变量$Y$的边缘概率密度$f_Y(y)$在$y=\frac{1}{2}$处的值等于__________。

12. 设二维随机变量(X, Y)在区域D上服从均匀分布，其中D: $0\leqslant x\leqslant 2$，$0\leqslant y\leqslant 2$.(X, Y)的概率密度记为$f(x, y)$，则$f(1,1)=$__________。

13. 设二维随机变量(X, Y)的分布函数为$F(x, y)=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-y}) & x>0, y>0 \\ 0 & 其他\end{cases}$，则$P\{X\leqslant 1, Y\leqslant 1\}=$__________。

14. 设二维随机变量$(X, Y)\sim N(0, 0; 1, 4; 0)$，则$X$的概率密度$f_X(x)=$____________。

三、计算题

1. 设二维随机变量$(X，Y)$的概率密度为$f(x，y)=\begin{cases} cx & 0<x<1，0<y<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$。

求：（1）常数c；

（2）$(X，Y)$分别关于X，Y的边缘概率密度；

（3）试问X与Y是否相互独立，为什么？

2. 设随机变量X服从区间[0，1]上的均匀分布，Y服从参数为1的指数分布，且X与Y相互独立。

求：（1）X及Y的概率密度；

（2）$(X，Y)$的概率密度；

（3）$P\{X>Y\}$。

【参考答案】

一、单项选择题

1.～5. AAADD　6.～11. ADCBDD

二、填空题

1.～3. $\frac{1}{6}$；e^{-3}；$f_Y(y)=\begin{cases} 3y^2 & 0\leqslant y\leqslant 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$；

4.～6. $f_X(x)=\begin{cases} 3\mathrm{e}^{-3x} & x>0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$；$\frac{1}{4}$；$\frac{1}{6}$；

7. $\begin{cases} \left(1-\mathrm{e}^{-3x}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-4y}\right) & x>0，y>0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$；

8.～12. $\leqslant$ $f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{6}(2x+1) & 0\leqslant x\leqslant 2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$；$\frac{1}{2}$；$\frac{1}{4}$；$\frac{1}{2}$；0.25；

13.～14. $\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)^2$；$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

三、计算题

1. **【解】**（1）$1=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 cx\mathrm{d}y=\frac{c}{2}$，解得$c=2$

（2）X 的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}\int_0^1 2x\mathrm{d}y & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

Y 的概率密度 $f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^1 2x\mathrm{d}x & 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

（3）因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 相互独立。

2. **【解】**（1）X 的边缘概率密度：$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

Y 的边缘概率密度：$f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y} & y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

（2）（X，Y）的边缘概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y} & 0\leqslant x\leqslant 1,\ y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

（3）$P(X>Y)=\iint\limits_{x>y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-1}$

第四章　随机变量的数字特征

【考核要求】

理解期望与方差的概念，掌握期望与方差的性质与计算方法，能计算随机变量函数的期望；掌握两点分布、二项分布、泊松分布、均匀分布、指数分布和正态分布的期望与方差；了解协方差、相关系数的概念及性质，能求相关系数与协方差。

重点：期望、方差、协方差的计算；随机变量函数的数学期望。

难点：随机变量函数的数学期望。

考点 1　数学期望

【考核内容】

1. 离散型随机变量的期望

（1）定义

设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k$，$(k=1, 2, \cdots)$，若级数 $\sum\limits_k x_k p_k$ 绝对收敛，则称 $\sum\limits_k x_k p_k$ 为 X 的数学期望（简称期望或均值），记作 $E(X)$。

$$E(X)=\sum_k x_k p_k$$

（2）几个离散型分布的期望

① 两点分布　$E(X)=p$；

② 二项分布　$E(X)=np$；

③ 泊松分布　$E(X)=\lambda$。

（3）随机变量函数的期望

$$E(Y)=E\left[g(X)\right]=\sum_k g(x_k)p_k$$

2. 连续型随机变量的期望

（1）定义

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则称 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 为随机变量 X 的数学期望（简称期望或均值），记作 $E(X)$。

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$$

（2）几个连续型分布的期望

① 均匀分布　$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$；

② 指数分布　$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$；

③ 正态分布　$E(X)=\mu$。

（3）随机变量函数的期望

$$E(Y)=E\left[g(X)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

3. 二维随机变量函数的期望

（1）若$(X，Y)$为离散型随机变量，若其分布律为$P_{ij}=P\{X=x_i, Y=y_j\}$边缘分布律为

$$P_{i\bullet}=\sum_j p_{ij}，\quad P_{\bullet j}=\sum_i p_{ij}$$

则

$$E(X)=\sum_i x_i p_{i\bullet}=\sum_i\sum_j x_i p_{ij}$$

$$E(Y)=\sum_j y_i p_{\bullet j}=\sum_i\sum_j y_i p_{ij}$$

（2）若$(X，Y)$为二维连续型随机变量，$f(x，y)$，$f_X(x)$ $f_Y(y)$分别为$(X，Y)$的概率密度与边缘概率密度，则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x，y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x，y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

（3）设$g(x，y)$为连续函数，对于二维随机变量$(X，Y)$的函数$g(X，Y)$，

① 若$(X，Y)$为离散型随机变量，级数$\sum_i\sum_j\left|g(x_i，y_i)\right|p_{ij}$收敛，则

$$E\left[g(X,Y)\right]=\sum_i\sum_j\left|g(x_i,y_i)\right|p_{ij}$$

② 若(X, Y)为连续型随机变量，且积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x, y)|f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$收敛，则

$$E[g(X, Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x, y)|f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

4. 期望的性质

① $E(C)=C$，C为常数；

② $E(CX)=CE(X)$；

③ $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$；

④ X，Y独立时，$E(XY)=E(X)E(Y)$。

注意：逆向不成立.

【典型例题】

例 1　设$X\sim B\left(10, \frac{1}{3}\right)$，则$E(X)=$（　　）。

A. $\frac{1}{3}$　　B. 1　　C. $\frac{10}{3}$　　D. 10

【解】选 C。

例 2　设随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0 & x<2\\ \frac{x}{2}-1 & 2\leqslant x<4\\ 1 & x\geqslant 4\end{cases}$，则$E(X)=$（　　）。

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 3

【解】选 D。

例 3　已知随机变量X服从参数为 2 的指数分布，则随机变量X的期望为（　　）。

A. $-\frac{1}{2}$　　B. 0　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

【解】选 C。

例 4　随机变量X的所有可能取值为 0 和x，且$P\{X=0\}=0.3$，$E(X)=1$，则x=__________。

【解】$\frac{10}{7}$。

例 5　设随机变量X在区间（1，0）上服从均匀分布，$Y=3X-2$，则$E(Y)=$__________。

【解】$-\dfrac{1}{2}$。

例 6　设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，则 $E(X)=$________。

【解】$\dfrac{2}{3}$。

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 已知随机变量 X 的分布律为

X	-2	1	x
P	1/4	p	1/4

且 $E(X)=1$，则常数 $x=$（　　）。

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

2. 设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	1/3	1/3
1	1/3	0

则 $E(XY)=$（　　）。

A. $-\dfrac{1}{9}$　　B. 0　　C. $\dfrac{1}{9}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 2 的指数分布，$Y\sim B\left(6,\dfrac{1}{2}\right)$，则 $E(X-Y)=$（　　）。

A. $-\dfrac{5}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 2　　D. 5

二、填空题

1. 设随机变量 X，Y 的分布律分别为

X	1	2	3
P	1/3	1/6	1/2

Y	-1	0	1
P	1/2	1/4	1/4

且 X，Y 相互独立，则 $E(XY)=$__________。

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，其分布律分别为

X	0	3
P	1/3	2/3

Y	0	2
P	1/2	1/2

则 $E(XY)=$____________。

3. 设随机变量 X 具有分布 $P\{X=k\}=\dfrac{1}{5}$，$k=1$，2，3，4，5，则 $E(X)=$____________。

4. 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	1
P	2/3	1/3

则 $E(X^2)=$____________。

5. 已知随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	5
P	0.5	0.3	0.2

则 $P\{X<E(X)\}=$____________。

6. 设二维随机变量 $(X，Y)$ 的分布律为

$X \backslash Y$	0	1
1	1/6	2/6
2	2/6	1/6

$E(XY)=$____________。

三、计算题

设测量距离时产生的随机误差 $X\sim N(0,\ 10^2)$（单位：m），现进行三次独立测量，记 Y 为三次测量中误差绝对值大于 19.6 的次数，已知 $\varPhi(1.96)=0.975$。

（1）求每次测量中误差绝对值大于 19.6 的概率 p；

（2）问 Y 服从何种分布，并写出其分布律；

（3）求 $E(Y)$。

【参考答案】

一、单项选择题

1.～3. BBA

二、填空题

1.～6. $-\dfrac{13}{24}$；　2；　3；　1；　0.8；　$\dfrac{2}{3}$

三、计算题

1. （1）0.05；

（2）Y∶$B(3,\ 0.05)$，$C_3^k 0.05^k 0.95^{3-k}$，$k=0$，1，2，3；

（3）0.15。

【课后练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设随机变量 X 具有分布 $P\{X=k\}=\dfrac{1}{5}$，$k=1$，2，3，4，5，则 $E(X)=$（　　）。

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

2. 设随机变量 X 服从参数为 $\dfrac{1}{2}$ 的指数分布，则 $E(X)=$（　　）。

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 2　　D. 4

3. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & 2<x<4 \\ 0 & 其他\end{cases}$，则 $E(X)=$（　　）。

A. 6　　B. 3　　C. 1　　D. $\dfrac{1}{2}$

4. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，即 $X\sim P(\lambda)$，若已知 $P(X=1)=P(X=2)$，则 X 的期望 $E(X)=$（　　）。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. 设 X 为随机变量，$E(X)=2$，$D(X)=5$，则 $E(X+2)^2=$（　　）。

A. 4　　B. 9　　C. 13　　D. 21

6. 设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，则 $E(2X-1)=$（　　）。

A. 0　　B. 1　　C. 3　　D. 4

二、填空题

1. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(2,4)$，Y 服从均匀分布 $U(3,5)$，则 $E(2X-3Y)=$ ________。

2. 设随机变量 X 的分布律为

P	0.4	0.2	0.4
X	-2	0	2

则 $E(X)=$ ________。

3. 设随机变量 X 的分布律为

P	0.5	0.4	0.1
X	0	1	2

则 $E(X^2)=$____________。

4. 设随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，则 $E(2X)=$____________。

5. 设随机变量 X 服从$[2，5]$上的均匀分布，则 $E(X)=$____________。

6. 设随机变量 X 服从参数为 3 的泊松分布，则 $E(X-3)=$____________。

7. 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1
P	a	b	0.4

a，b 为常数，且 $E(X)=0$，则 $a-b=$____________。

8. 设二维随机变量 $(X，Y)$ 的分布律为

X \\ Y	-1	1
-1	1/4	1/4
1	1/4	1/4

则 $E(X^2+Y^2)=$____________。

三、计算题

1. 设随机变量 X 服从区间 [0，1] 上的均匀分布，Y 服从参数为 1 的指数分布，且 X 与 Y 相互独立，求 $E(XY)$。

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} ax & 0<x<2 \\ cx+b & 2\leqslant x\leqslant 4 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，已知 $E(X)=2$，$P(1<X<3)=\dfrac{3}{4}$。

求：（1）常数 a，b，c；（2）$E(e^X)$。

3. 某柜台做顾客调查，设每小时到达柜台的顾客数 X 服从泊松分布，则 $X\sim P(\lambda)$，若已知 $P(X=1)=P(X=2)$，且该柜台销售情况 Y（千元），满足 $Y=\dfrac{1}{2}X^2+2$，试求：

（1）参数 λ 的值；

（2）一小时内至少有一个顾客光临的概率；

（3）该柜台每小时的平均销售情况 $E(Y)$。

4. 设某型号电视机的使用寿命 X 服从参数为 1 的指数分布(单位：万小时)。求：

（1）该型号电视机的使用寿命超过 $t(t>0)$ 的概率；

（2）该型号电视机的平均使用寿命。

5. 随机变量 X 概率密度 $f(x)=\begin{cases} ax+b & 0<x<2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，且 $P(X\geqslant 1)=\dfrac{1}{4}$。

求：（1）常数 a，b；（2）X 的分布函数 $F(x)$；（3）$E(X)$。

6. 某种装置中有两个相互独立工作的电子元件，其中一个电子元件的使用寿命 X（单位：小时）服从参数为 $\dfrac{1}{1000}$ 的指数分布，另一个电子元件的使用寿命 Y（单位：小时）服从参数为 $\dfrac{1}{2000}$ 的指数分布。试求：

(1) $(X，Y)$ 的概率密度；

(2) $E(X)$，$E(Y)$；

(3) 两个电子元件的使用寿命均大于 1200 小时的概率。

【参考答案】

一、单项选择题

1.～6. BCBCDA

二、填空题

1.～8. -8；0；0.8；4；3.5；0；0.2；2

三、计算题

1. **【解】** X 服从区间［0，1］上的均匀分布，所以 $E(X)=\dfrac{1}{2}$

Y 服从参数为 1 的指数分布，所以 $E(Y)=1$

又 X 与 Y 相互独立，故 $E(XY)=E(X)\ E(Y)=\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{2}$

2. **【解】**（1）由概率密度的性质知，有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 ax\mathrm{d}x+\int_2^4(cx+b)\mathrm{d}x=2a+6c+2b$$

又因为

$$2=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 x\cdot ax\mathrm{d}x+\int_2^4 x(cx+b)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}a+\frac{56}{3}c+6b$$

而

$$\frac{3}{4}=P(1<X<3)=\int_1^2 ax\mathrm{d}x+\int_2^3(cx+b)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}a+\frac{5}{2}c+b$$

联立方程组，解得 $a=\frac{1}{4}$，$b=1$，$c=-\frac{1}{4}$

（2）由期望的定义，得

$$E(e^X)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^x f(x)dx=\int_0^2 e^x\cdot\frac{x}{4}dx+\int_2^4 e^x\left(1-\frac{x}{4}\right)dx=\frac{1}{4}e^4-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{4}$$

3. **【解】**（1）由题意 $P(X=1)=\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}=P(X=2)$

所以 $\lambda=\frac{\lambda^2}{2}$，得 $\lambda=2$

（2）在一小时内至少有一个顾客光临的概率为

$$P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}=1-e^{-2}$$

（3）该柜台每小时的平均销售情况 $E(Y)$：

$$E(X^2)=[E(X)]^2+D(X)=\lambda+\lambda^2=6$$

$$E(Y)=\frac{1}{2}E(X^2)+2=5\text{（千元）}$$

4. **【解】**由题设知 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

（1） $P\{X>t\}=\int_t^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-t}\quad(t>0)$

（2）平均使用寿命 $E(X)=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=1$

5. **【解】**(1) $1=\int_0^2(ax+b)dx=2a+2b$

$$\frac{1}{4}=P(X\geqslant 1)=\int_1^2(ax+b)dx=\frac{3}{2}a+b$$

解得 $a=-\frac{1}{2}$，$b=1$.

（2） X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ -\frac{1}{4}x^2+x & 0<x<2\\ 1 & x\geqslant 2\end{cases}$$

（3） $E(X)=\int_0^2 x\left(-\frac{1}{2}x+1\right)dx=\frac{2}{3}$

6. **【解】**（1）X 的概率密度：

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1000}\mathrm{e}^{-\frac{1}{1000}x} & x>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

Y 的概率密度:

$$f_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2000}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2000}y} & y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

X 与 Y 相互独立，则 $(X，Y)$ 的概率密度：

$$f(x，y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2000000}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2000}(2x+y)} & x>0，y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

（2）因为 $X∶E\left(\dfrac{1}{1000}\right)$， 所以 $E(X)=1000$

因为 $Y∶E\left(\dfrac{1}{2000}\right)$， 所以 $E(Y)=2000$

（3）$P\left(X>1200，Y>1200\right)=\int_{1200}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{1200}^{+\infty}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y$

$$=\int_{1200}^{+\infty}\frac{1}{1000}\mathrm{e}^{-\frac{1}{1000}x}\mathrm{d}x\cdot\int_{1200}^{+\infty}\frac{1}{2000}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2000}y}\mathrm{d}y$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{6}{5}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}}=\mathrm{e}^{-\frac{9}{5}}$$

考点 2　方差

【考点内容】

1. 方差的概念

（1）定义

设随机变量 $\left[X-E(X)\right]^2$ 的期望存在，则称 $E\left[X-E(X)\right]^2$ 为随机变量 X 的方差，记作 $D(X)$，即

$$D(X)=E\left[X-E(X)\right]^2$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为 X 的标准差（或均方差）.

方差反映随机变量与期望值的平均偏离程度.

（2）计算方法

若 X 为离散型　　$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\left[x_i-E(X)\right]^2 p_i$

若 X 为连续型　　$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-E(X)\right]^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

（3）其他计算公式

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

2. 几个分布的方差

① 两点分布　$D(X)=p(1-p)$；

② 二项分布　$D(X)=np(1-p)$；

③ 泊松分布　$D(X)=\lambda$；

④ 均匀分布　$D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$；

⑤ 指数分布　$D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$；

⑥ 正态分布　$D(X)=\sigma^2$。

3. 方差的性质

① $D(C)=0$，C 为常数；

② $D(CX)=C^2D(X)$，特例：$D(-X)=D(X)$；

③ X，Y 独立时，$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$。

注意：逆向不成立。

特例　$D(X+C)=D(X)$。

【典型例题】

例 1　设随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，则下列结论中正确的是（　　）。

A. $E(X)=0.5$，$D(X)=0.5$　　B. $E(X)=0.5$，$D(X)=0.25$

C. $E(X)=2$，$D(X)=4$　　D. $E(X)=2$，$D(X)=2$

【解】选 D。

例 2　设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N$（1，4），$Y\sim N$（0，1），令 $Z=X-Y$，则 $D(Z)=$（　　）。

A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. 6

【解】选 C。

例 3　设 X，Y 是任意随机变量，C 为常数，则下列各式中正确的是（　　）。

A. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$　　B. $D(X+C)=D(X)+C$

C. $D(X-Y)=D(X)-D(Y)$　　D. $D(X-C)=D(X)$

【解】选 D。

例 4　已知随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2x} & x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，则 X 的均值和方差分别为（　　）。

A. $E(X)=2$，$D(X)=4$　　B. $E(X)=4$，$D(x)=2$

C. $E(X)=\frac{1}{4}$，$D(X)=\frac{1}{2}$　　D. $E(X)=\frac{1}{2}$，$D(X)=\frac{1}{4}$

【解】选 D。

例 5　设 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim B\left(16,\frac{1}{2}\right)$，且两随机变量相互独立，则 $D(2X+Y)=$ ________。

【解】8。

例 6　设 $X\sim N(0,1)$，$Y=2X-3$，则 $D(Y)=$ ________。

【解】4。

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 已知随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，则随机变量 X 的方差为（　　）。

A. -2　　B. 0　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

2. 设 $X\sim B\left(10,\frac{1}{3}\right)$，则 $\frac{D(X)}{E(X)}=$（　　）。

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. 1　　D. $\frac{10}{3}$

3. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X\sim N(3,4)$，$Y\sim N(2,9)$，则 $Z=3X-Y\sim$（　　）。

A. $N(7,21)$　　B. $N(7,27)$

C. $N(7,45)$　　D. $N(3,45)$

4. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim B\left(36,\frac{1}{6}\right)$，$Y\sim B\left(12,\frac{1}{3}\right)$，则 $D(X-Y+1)=$

（　　）。

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{7}{3}$　　C. $\frac{23}{3}$　　D. $\frac{26}{3}$

5. 设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，则下列各项中正确的是（　　）。

A. $E(X)=0.5$，$D(X)=0.25$　　B. $E(X)=2$，$D(X)=2$

C. $E(X)=0.5$，$D(X)=0.5$　　D. $E(X)=2$，$D(X)=4$

6. 设随机变量 X 服从参数为 3 的泊松分布，$Y\sim B\left(8,\ \frac{1}{3}\right)$，且 X，Y 相互独立，则 $D(X-3Y-4)=$（　　）。

A. -13　　B. 15　　C. 19　　D. 23

7. 设 $X\sim N(1,\ 3^2)$，则下列选项中，不成立的是（　　）。

A. $E(X)=1$　　B. $D(X)=3$

C. $P(X=1)=0$　　D. $P(X<1)=0.5$

二、填空题

1. 设 $X\sim B\left(4,\ \frac{1}{2}\right)$，则 $E(X^2)=$__________。

2. 已知随机变量 X 满足 $E(X)=-1$，$E(X^2)=2$，则 $D(X)=$__________。

3. 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.3	0.4

则 $D(X)=$__________。

4. 设随机变量 X 服从参数为 3 的指数分布，则 $D(2X+1)=$__________。

5. 设二维随机变量 $(X,\ Y)\sim N(\mu_1,\ \mu_2;\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2;\ \rho)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $\rho=$__________。

6. 设 $X\sim N(-1,\ 4)$，$Y\sim N(1,\ 9)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $X+Y\sim$__________。

7. 已知 $E(X)=-1$，$D(X)=3$，则 $E(3X^2-2)=$__________。

8. 设随机变量 $X\sim B\left(18,\ \frac{1}{3}\right)$，则 $D(X)=$__________。

9. 设随机变量 X 具有分布 $P\{X=k\}=\frac{1}{5}$，$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$，则 $D(X)=$__________。

10. 若 $X\sim N(3,\ 0.16)$，则 $D(X+4)=$__________。

三、计算题

1. 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases} cx^2 & -2\leqslant x\leqslant 2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，试求：

（1）常数c；（2）E（X），D（X）；（3）$P\{|X-E(X)|<D(X)\}$。

2. 设二维随机向量$(X，Y)$的概率密度为$f(x，y)=\begin{cases} xy & 0<x<1，0<y<2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，试求：

（1）$E(X)$，$E(Y)$；（2）$D(X)$，$D(Y)$；（3）ρ_{XY}。

3. 设X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2} & 0\leqslant x\leqslant 2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

求：（1）$E(X)$，$D(X)$；（2）$D(2-3X)$；（3）$P\{0<X<1\}$。

4. 2008年北京奥运会即将召开，某射击队有甲、乙两个射手，他们的射击技术如下表。其中X表示甲射击环数，Y表示乙射击环数，试讨论派遣哪个射手参赛比较合理？

X	8	9	10
p	0.4	0.2	0.4

Y	8	9	10
p	0.1	0.8	0.1

5. 设随机变量X的分布函数$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{x}{8} & 0\leqslant x\leqslant 8 \\ 1 & x\geqslant 8 \end{cases}$，求：

（1）X概率密度$f(x)$；（2）$E(X)$，$D(X)$；

（3）$P\left\{|X-E(X)|\leqslant\dfrac{D(X)}{8}\right\}$.

6. 设离散型随机变量X的分布律为$\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & p_1 & p_2 \end{array}$，且已知$E$（$X$）=0.3，试求：
（1）p_1，p_2；（2）$D(-3X+2)$。

7. 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases} ax+b & 0<x<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，且$E(X)=\dfrac{7}{12}$。

求：（1）常数a，b；（2）$D(X)$。

【参考答案】

一、单项选择题

1.～7. DBCCACB

二、填空题

1.～5. 5；1；1；$\frac{4}{9}$；0

6.～10. $N(0, 13)$；10；4；2；0.16

三、计算题

1. 【解】（1）$\frac{3}{16}$；（2）0，$\frac{12}{5}$；（3）1

2. 【解】（1）$\frac{2}{3}$，$\frac{4}{3}$；（2）$\frac{1}{18}$，$\frac{2}{9}$；（3）0

3. 【解】（1）$\frac{4}{3}$，$\frac{2}{9}$；（2）2；（3）$\frac{1}{4}$

4. 【解】乙。

5. 【解】（1）$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8} & 0\leqslant x\leqslant 8\\ 0 & 其他\end{cases}$；（2）4，$\frac{16}{3}$；（3）$\frac{1}{6}$

6. 【解】（1）0.7，0.3；（2）1.89

7. 【解】（1）1，$\frac{1}{2}$；（2）$\frac{11}{144}$

【课后练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(0,9)$，$Y\sim N(0,1)$，令 $Z=X-2Y$，则 $D(Z)=$（　　）。

A. 5　　B. 7　　C. 11　　D. 13

2. 已知随机变量 $X\sim N(0, 1)$，则随机变量 $Y=2X-1$ 的方差为（　　）。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim B(16, 0.5)$，Y 服从参数为 9 的泊松分布，则 $D(X-2Y+3)=$（　　）。

A. -14　　B. -11　　C. 40　　D. 43

4. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{(x+3)^2}{4}}$，则 $E(X)$，$D(X)$ 分别为（　　）。

A. -3，$\sqrt{2}$　　B. -3，2　　C. 3，$\sqrt{2}$　　D. 3，2

5. 设随机变量 X 服从参数 p 的两点分布，若随机变量 X 取值为 1 的概率 p 为取值为 0

的概率 q 的 3 倍，则方差 $D(X)=$（　　）。

A. $\dfrac{3}{16}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. 3

6. 设随机变量 $X \sim B(n,\ p)$，且 $E(X)=2.4,\ D(X)=1.44$，则参数 $n,\ p$ 的值分别为（　　）。

A. 4，0.6　　B. 6，0.4　　C. 8，0.3　　D. 3，0.8

7. 设二维随机变量 $(X,\ Y)$ 的分布律为

$X \backslash Y$	0	1
1	$1/2$	$1/6$
2	$1/6$	$1/6$

则 $D(3X)=$（　　）。

A. $\dfrac{2}{9}$　　B. 2　　C. 4　　D. 6

二、填空题

1. 设随机变量 X 服从二项分布 $B\left(3,\ \dfrac{1}{3}\right)$，则 $E(X^2)=$__________。

2. 设随机变量 $X \sim N(0,4)$，则 $E(X^2)=$__________。

3. 设随机变量 X 的方差 $D(X)=1$，则 $-X$ 的方差 $D(-X)=$__________。

4. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 在区间[0，3]上服从均匀分布，Y 服从参数为 4 的指数分布，则 $D(X+Y)=$__________。

5. 设 X 为随机变量，$E(X+3)=5,\ D(2X)=4$，则 $E(X^2)=$__________。

6. 设随机变量 $X \sim N(1,\ 4)$，则 $D(X)=$ __________。

7. 设随机变量 $X \sim U(-1,\ 3)$，则 $D(2X-3)=$__________。

三、计算题

1. 已知 $D(X)=9,\ D(Y)=1$，相关系数 $\rho_{XY}=0.4$，求 $D(X+2Y)$，$D(2X-3Y)$。

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1+x & -1\leqslant x<0\\ 1-x & 0\leqslant x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，试求 $E(X)$ 及 $D(X)$。

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}A & -2\leqslant x\leqslant 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

试求：(1)常数 A；(2) $E(X),\ D(X)$；(3) $P\{|X|\leqslant 1\}$。

4. 设随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3	4
P	$1/6$	$1/3$	$1/3$	$1/6$

且 $Y=X(X-2)$，试求：(1) X 的期望 $E(X)$；(2) X 的方差 $D(X)$；(3) Y 的期望 $E(Y)$。

【参考答案】

一、单项选择题

1.～7. DDCBABB

二、填空题

1.～7. $\frac{5}{3}$； 4； 1； $\frac{13}{16}$； 5； 4； $\frac{16}{3}$

三、计算题

1. **【解】**

$$\mathrm{Cov}(X，Y)=\rho_{XY}\mathrm{g}\sqrt{D(X)}\mathrm{g}\sqrt{D(Y)}=0.4\times\sqrt{9}\times\sqrt{4}=2.4$$

$$\begin{aligned}D(X+2Y)&=D(X)+D(2Y)+2\mathrm{Cov}(X，2Y)\\&=D(X)+2^2D(Y)+2\times2\mathrm{Cov}(X，Y)\\&=9+4\times4+4\times2.4=34.6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(2X-3Y)&=D(2X)+D(-3Y)+2\mathrm{Cov}(2X，-3Y)\\&=2^2\cdot D(X)+(-3)^2D(Y)+2\times2\cdot(-3)\cdot\mathrm{Cov}(X，Y)\\&=4\times9+9\times4-12\times2.4=43.2\end{aligned}$$

2. **【解】** $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_{-1}^{0}x(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x(1-x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=0$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1}{6}$$

3. **【解】**（1）由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}A\mathrm{d}x=4A$，得 $A=\frac{1}{4}$

（2）由 $X:U[-2，2]$，得 $E(X)=0$，$D(X)=\frac{4}{3}$

（3）$P\{|X|\leqslant1\}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$

4. 【解】（1）$E(X)=\sum_{i=1}^{4} iP(X=i)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{6}=\frac{5}{2}$

（2）$D(X)=E(X^2)-E(X)^2$

$E(X^2)=\sum_{i=1}^{4} i^2P(X=i)=1\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{3}+9\times\frac{1}{3}+16\times\frac{1}{6}=\frac{43}{6}$

$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{43}{6}-\frac{25}{4}=\frac{11}{12}$

（3）$E(Y)=E(X^2)-2E(X)=\frac{43}{6}-5=\frac{13}{6}$

考点 3　协方差与相关系数

【考点内容】

1．协方差

（1）定义

设二维随机变量$(X，Y)$，$E(X)$，$E(Y)$都存在，如果$E\left[\left(X-E(X)\right)\left(Y-E(Y)\right)\right]$存在，则称此值为$X$与$Y$的协方差，记作$\mathrm{Cov}(X，Y)$，即

$$\mathrm{Cov}(X，Y)=E\left[\left(X-E(X)\right)\left(Y-E(Y)\right)\right]$$

（2）计算方法

当$(X，Y)$为二维离散型随机变量时，

$$\mathrm{Cov}(X，Y)=\sum_i\sum_j\left[x_i-E(X)\right]\left[y_j-E(Y)\right]p_{ij}$$

当$(X，Y)$为二维连续型随机变量时，

$$\mathrm{Cov}(X，Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-E(X)\right]\left[y-E(Y)\right]f(x，y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

（3）其他计算公式

$$\mathrm{Cov}(X，Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

当$X=Y$时，$\mathrm{Cov}(X，Y)=D(X)$

（4）协方差的性质

① $\mathrm{Cov}(X，Y)=\mathrm{Cov}(Y，X)$

② $\mathrm{Cov}(aX，bY)=ab\mathrm{Cov}(X，Y)$

③ $\mathrm{Cov}(X_1+X_2，Y)=\mathrm{Cov}(X_1，Y)+\mathrm{Cov}(X_2，Y)$

④ 若 X，Y 相互独立，则 $\mathrm{Cov}(X, Y)=0$

注意：逆向不成立。

2. 相关系数

（1）定义

若 $D(X)>0$，$D(Y)>0$，称 $\dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 为与的相关系数，记为 ρ_{XY}，即

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

（2）性质

① $|\rho_{XY}|\leqslant 1$；

② $|\rho_{XY}|=1$ 的充分必要条件是存在常数 a，b，使 $P\{Y=aX+b\}=1$ 且 $a\neq 0$。

（3）相关系数的意义

ρ_{XY} 反映随机变量 X 与 Y 的线性联系的密切程度，$|\rho_{XY}|$ 越接近于 1，X 与 Y 之间的线性关系越密切。当 $|\rho_{XY}|=1$ 时，X 与 Y 之间存在完全的线性关系；当 $|\rho_{XY}|=0$ 时，X 与 Y 之间无线性关系，称 X 与 Y 不相关。

（4）几个结论

① X 与 Y 独立 $\Rightarrow \mathrm{Cov}(X, Y)=0 \Leftrightarrow \rho_{XY}=0$

② $E(XY)=E(X)E(Y) \Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X, Y)=0 \Leftrightarrow \rho_{XY}=0$

③ $D(X+Y)=D(X)+D(Y) \Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X, Y)=0 \Leftrightarrow \rho_{XY}=0$

④ $X: N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 时，$\rho_{XY}=\rho$

X 与 Y 独立 $\Leftrightarrow \rho=0 \Leftrightarrow$ X 与 Y 不相关

⑤ $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X, Y)$

【典型例题】

例 1 设随机变量 $X\sim B\left(10, \dfrac{1}{2}\right)$，$Y\sim N(2, 10)$，又 $E(XY)=14$，则 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=$（　　）。

A. -0.8　　B. -0.16　　C. 0.16　　D. 0.8

【解】 选 D。

例 2 设二维随机变量 (X, Y) 的协方差 $\mathrm{Cov}(X, Y)=\dfrac{1}{6}$，且 $D(X)=4$，$D(Y)=9$，则 X

与 Y 的相关系数 ρ_{XY} 为（　　）。

A. $\dfrac{1}{216}$　　B. $\dfrac{1}{36}$　　C. $\dfrac{1}{6}$　　D. 1

【解】选 B。

例 3　已知 $E(X)=2$，$E(Y)=2$，$E(XY)=4$，则 X，Y 的协方差 Cov（X，Y）= ________。

【解】0。

例 4　设 X，Y 为随机变量，已知协方差 Cov(X，Y)=3，则 Cov($2X$，$3Y$)= __________。

【解】18。

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 已知 $D(X)=4$，$D(Y)=25$，Cov（X，Y）$=4$，则 $\rho_{XY}=$（　　）。

A. 0.004　　B. 0.04　　C. 0.4　　D. 4

2. 已知 $D(X)=1$，$D(Y)=25$，$\rho_{XY}=0.4$，则 $D(X-Y)=$（　　）。

A. 6　　B. 22　　C. 30　　D. 46

3. 设 $E(X)$，$E(Y)$，$D(X)$，$D(Y)$ 及 $\mathrm{Cov}(X，Y)$ 均存在，则 $D(X-Y)=$（　　）。

A. $D(X)+D(Y)$

B. $D(X)-D(Y)$

C. $D(X)+D(Y)-2\mathrm{Cov}(X，Y)$

D. $D(X)-D(Y)+2\mathrm{Cov}(X，Y)$

二、填空题

1. 设 $E(X)=2$，$E(Y)=3$，$E(XY)=7$，则 Cov（X，Y）= ____________。

2. 设 X_1，X_2，Y 均为随机变量，已知 $\mathrm{Cov}(X_1，Y)=-1$，$\mathrm{Cov}(X_2，Y)=3$，则 Cov（X_1+2X_2，Y）= ____________。

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $D(X)>0$，$D(Y)>0$，则 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=$ ____________。

三、计算题

1. 设（X，Y）服从在区域 D 上的均匀分布，其中 D 由 x 轴、y 轴及 $x+y=1$ 围成，求 X 与 Y 的协方差 $\mathrm{Cov}(X，Y)$。

2. 设二维随机向量（X，Y）的概率密度为 $f(x，y)=\begin{cases} xy & 0<x<1，0<y<2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，试求：

（1）$E(X)$，$E(Y)$；（2）$D(X)$，$D(Y)$；（3）ρ_{XY}。

3. 设离散型随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1
P	$1/4$	$1/2$	$1/4$

令 $Y=X^2$，求：(1) $D(X)$；(2) $D(Y)$；(3) $\mathrm{Cov}(X,Y)$。

4. 已知随机变量 X，Y 的相关系数为 ρ_{XY}，若 $U=aX+b, V=cY+d$，其中 $ac>0$。试求 U，V 的相关系数 ρ_{UV}。

【参考答案】

一、单项选择题

1.～3. CBC

二、填空题

1.～3. 1；5；0

三、计算题

1. $\mathrm{Cov}(X,Y)=-\frac{1}{36}$

2. （1）$\frac{2}{3}$，$\frac{4}{3}$；（2）$\frac{1}{18}$，$\frac{2}{9}$；（3）0

3. （1）$\frac{1}{2}$；（2）$\frac{1}{4}$；（3）0

4. ρ_{XY}

【课后练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设 (X,Y) 为二维随机变量，且 $D(X)>0,\ D(Y)>0$，则下列等式成立的是（　　）。

A. $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$

B. $\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}$

C. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

D. $\mathrm{Cov}(2X,2Y)=2\mathrm{Cov}(X,Y)$

2. 设 X，Y 为随机变量，$D(X)=4,\ D(Y)=16,\ \mathrm{Cov}(X,Y)=2$，则 $\rho_{XY}=$（　　）。

A. $\frac{1}{32}$　　B. $\frac{1}{16}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

3. 设随机变量 X 的方差 $D(X)$ 存在，且 $D(X)>0$，令 $Y=-X$，则 $\rho_{XY}=$（　　）。

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

二、填空题

1. 设随机变量 X 的期望 $E(X)=2$，方差 $D(X)=4$，随机变量 Y 的期望 $E(Y)=4$，方差 $D(Y)=9$，又 $E(XY)=10$，则 X，Y 的相关系数 $\rho=$__________。

2. 设 X，Y 的期望和方差分别为 $E(X)=0.5$，$E(Y)=-0.5$，$D(X)=D(Y)=0.75$，$E(XY)=0$，则 X，Y 的相关系数 $\rho_{XY}=$__________。

3. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,1)$，$\mathrm{Cov}(X,Y)=0.5$，则 $D(X+Y)=$__________。

4. 设随机变量 X 与 Y 的方差分别为 $D(X)=16$，$D(Y)=1$，$\rho_{XY}=0.4$，则 X 与 Y 的协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$__________。

5. 设 X，Y 为随机变量，已知 $D(X)=4$，$D(Y)=9$，$\mathrm{Cov}(X,Y)=5$，$D(X+Y)=$

__________。

三、计算题

1. 已知二维随机变量 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.3	0.2	0.1
1	0.1	0.3	0

求：（1）X 和 Y 的分布律；（2）$\mathrm{Cov}(X,Y)$。

2. 设随机变量 X，Y 相互独立，$X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,4)$，$U=X+Y$，$V=X-Y$.

求：（1）$E(XY)$；（2）$D(U)$，$D(V)$；（3）$\mathrm{Cov}(U,V)$。

3. 设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	-3	0	3
-3	0	0.2	0
0	0.2	0.2	0.2
3	0	0.2	0

求：（1）(X,Y) 分别关于 X，Y 的边缘分布律；（2）$D(X)$，$D(Y)$，$\mathrm{Cov}(X,Y)$。

4. 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	1
P	0.5	0.5

记 $Y=X^2$。

求：（1）$D(X)$，$D(Y)$；（2）$\mathrm{Cov}(X, Y)$。

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从标准正态分布，令 $\xi = X+Y$，$\eta = X-Y$。

求：（1）$E(\xi)$，$E(\eta)$，$D(\xi)$，$D(\eta)$；（2）$\rho_{\xi\eta}$。

【参考答案】

一、单项选择题

1.～3. BDA

二、填空题

1.～5. $\frac{1}{3}$；　$\frac{1}{3}$；　3；　1.6；　23

三、计算题

1. **【解】**（1）X 的分布律：

X	-1	1
P	0.6	0.4

Y 的分布律：

Y	-1	0	1
P	0.4	0.5	0.1

（2）$E(X)=0.4$，$E(Y)=-0.3$

$$\mathrm{Cov}(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-0.1+0.12=0.02$$

2. **【解】**（1）由于 X，Y 相互独立，$E(XY)=E(X)E(Y)=0$

（2）$D(U)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)=5$

$$D(V)=D(X-Y)=D(X)+D(Y)=5$$

（3）$\mathrm{Cov}(U, V)=E(UV)-E(U)E(V)=E(X^2)-E(Y^2)$

$$=\left[D(X)+\left(E(X)\right)^2\right]-\left[D(Y)+\left(E(Y)\right)^2\right]$$

$$=1-4=-3$$

3. **【解】**（1）关于 X 的边缘分布律为

X	-3	0	3
P	0.2	0.6	0.2

关于 Y 的边缘分布律为

Y	-3	0	3
P	0.2	0.6	0.2

（2）$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=3.6$

$D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=3.6$

$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

4. 【解】（1）$E(X)=0$，$E(X^2)=1$，所以$D(X)=1$

$E(Y)=1$，$E(Y^2)=1$，所以$D(Y)=0$

（2）$E(XY)=E(X\cdot X^2)=E(X^3)=0$

$\mathrm{Cov}(X，Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

5. 【解】（1）$E(\xi)=E(X)+E(Y)=0$

$E(\eta)=E(X)-E(Y)=0$

$D(\xi)=D(X)+D(Y)=2$

$D(\eta)=D(X)+D(Y)=2$

（2）$E(\xi\eta)=E\left[(X+Y)(X-Y)\right]=E(X^2)-E(Y^2)=0$

则　$\mathrm{Cov}(\xi，\eta)=E(\xi\eta)-E(\xi)E(\eta)=0$

故　$\rho_{\xi\eta}=\dfrac{\mathrm{Cov}(\xi，\eta)}{\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}}=0$

第五章　大数定律及中心极限定理

【考核要求】

了解切比雪夫不等式，能用切比雪夫不等式估计概率，了解大数定律，掌握独立同分布的中心极限定理与二项分布以正态分布为近似分布的中心极限定理（棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理）的简单应用。

重点：中心极限定理的简单应用。

难点：中心极限定理的简单应用。

考点　大数定律及中心极限定理的应用

【考点内容】

1. 切比雪夫不等式

设随机变量 X 的期望 $E(X)$ 及方差 $D(X)$ 存在，则对任意小的正数 $\varepsilon>0$，有

$$P\left\{\left|X-E\left(X\right)\right|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant\frac{D\left(X\right)}{\varepsilon^{2}}$$

或

$$P\left\{\left|X-E\left(X\right)\right|<\varepsilon\right\}>1-\frac{D\left(X\right)}{\varepsilon^{2}}$$

切比雪夫不等式可用来估计概率。

2. 大数定律

（1）贝努利大数定律

设 m 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数， p 是事件 A 的概率，则对任意小的正数 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$$

此定律表明，当 n 充分大时，“频率与概率的绝对偏差小于任意给定的正数 ε ”必然发生，从而肯定“概率是频率的稳定值”这一结论。

（2）切比雪夫大数定律

设X_1，X_2，…，X_n，…是独立同分布的随机变量序列，$E(X_i)=\mu$，$D(X_i)=\sigma^2(i=1，2\cdots)$均存在，则对任意的正数$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$$

此定律表明，经过算术平均计算后得到的随机变量具有一种统计上的稳定性，其取值比较紧密的聚集在它的期望值附近。

3. 中心极限定理

（1）独立同分布序列的中心极限定理

设X_1，X_2，…，X_n相互独立，且$E(X_i)=\mu$，$D(X_i)=\sigma^2(i=1，2\cdots)$，则当$n$充分大时，$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$近似地服从正态分布$N(n\mu，n\sigma^2)$。

（2）棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

设Z_n是n次独立重复试验中事件A发生的次数，p是事件A发生的概率，则当n充分大时，近似地有Z_n～$N(np，npq)$。

此定理表明，当n充分大时，二项分布以正态分布为近似。

【典型例题】

例1　在每次试验中，事件A发生的概率是0.5，利用切比雪夫不等式估计，在1000次独立试验中，事件A发生的次数在400～600的概率。

【解】用X表示事件A发生的次数，X～$B(1000，0.5)$

则
$$E(X)=500，D(X)=250$$

$$P(400<X<600)=P(|X-500|<100)\geqslant 1-\frac{250}{100^2}=0.975$$

例2　100台车床彼此独立地工作，每台车床的实际工作时间占全部工作时间的80%，求任一时刻有70～86台车床在工作的概率。

【解】用X表示同时工作的车床数，X～$B(100，0.8)$

则
$$E(X)=80，D(X)=16$$

由中心极限定理，近似地有X～$N(80，16)$

即
$$P(70<X<86)=P\left(-2.5<\frac{X-80}{4}<1.5\right)$$

$$\approx \Phi(1.5)-\Phi(-2.5)$$
$$=\Phi(1.5)+\Phi(2.5)-1$$
$$=0.927$$

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设 X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 $X\sim N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$ 的样本，对任意的 $\varepsilon>0$，样本均值 $\overline{X}$ 所满足的切比雪夫不等式为（　　）。

A. $P\left\{\left|\overline{X}-n\mu\right|<\varepsilon\right\}\geqslant\dfrac{n\sigma^2}{\varepsilon^2}$　　B. $P\left\{\left|\overline{X}-\mu\right|<\varepsilon\right\}\geqslant 1-\dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

C. $P\left\{\left|\overline{X}-\mu\right|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant 1-\dfrac{n\sigma^2}{\varepsilon^2}$　　D. $P\left\{\left|\overline{X}-n\mu\right|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant\dfrac{n\sigma^2}{\varepsilon^2}$

2. 设随机变量 X 的 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，用切比雪夫不等式估计 $P\left(\left|X-E(X)\right|\leqslant 3\sigma\right)\geqslant$（　　）。

A. $\dfrac{1}{9}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{8}{9}$　　D. 1

3. 设 $X_i=\begin{cases}0 & \text{事件}A\text{不发生}\\ 1 & \text{事件}A\text{发生}\end{cases}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 10000)$，且 $P(A)=0.8$， X_1，X_2，…，X_{1000} 相互独立，令 $Y=\sum\limits_{i=1}^{10000}X_i$，则由中心极限定理知 Y 近似服从的分布是（　　）。

A. N（0，1）　　B. N（8000，40）

C. N（1600，8000）　　D. N（8000，1600）

4. 设 μ_n 是 n 次独立重复试验中事件 A 出现的次数，P 是事件 A 在每次试验中发生的概率，则对于任意的 $\varepsilon>0$，均有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{\mu_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right\}$（　　）。

A. =0　　B. =1　　C. >0　　D. 不存在

二、填空题

1. 设随机变量 X 的 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，用切比雪夫不等式估计 $P\left(\left|X-E(X)\right|\leqslant 3\sigma^2\right)\geqslant$ __________。

2. 设随机变量 $X\sim U(0,\ 1)$，用切比雪夫不等式估计 $P\left(\left|X-\dfrac{1}{2}\right|\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\leqslant$） __________。

3. 将一枚均匀硬币连掷 100 次，利用中心极限定理可知，正面出现的次数大于 60 的概

率近似为________。（附：$\Phi(2)=0.9772$）

4. 设随机变量序列 X_1，$X_2\cdots$，X_n，$\cdots$独立同分布，且 $E(X_i)=\mu$，$D(X_i)=\sigma^2\ (i=1, 2\cdots)$ 则对任意实数 x，$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}>x\right\}=$____________。

5. 设随机变量 $X\sim B(100, 0.8)$，由中心极限定理可知，$P\{74<X\leqslant 86\}\approx$___________。（附：$\Phi(1.5)=0.9332$）

6. 设 $X_i=\begin{cases}0 & 事件A不发生\\ 1 & 事件A发生\end{cases}$ $(i=1, 2, \cdots, 100)$，且 $P(A)=0.8$，X_1，$X_2\cdots$，X_{100} 相互独立，令 $Y=\sum\limits_{i=1}^{100}X_i$，则由中心极限定理知 Y 近似服从于正态分布，其方差为____________。

7. 随机变量 $X\sim B(100, 0.2)$，用中心极限定理计算 $P\{16\leqslant X\leqslant 24\}\approx$________。（附：$\Phi(1)=0.8413$）

【参考答案】

一、单项选择题

1.～4. BCDA

二、填空题

1.～7. $\dfrac{8}{9}$；$\dfrac{1}{4}$；0.0228；$1-\Phi(x)$；0.8664；16；0.6826

【课后练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设随机变量 X 服从参数为 0.5 的指数分布，用切比雪夫不等式估计 $P(|X-2|\geqslant 3)\leqslant$（　　）。

A. $\dfrac{1}{9}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

2. 设随机变量 $Z_n\sim B(n, p)$，$n=1, 2, \ldots$，其中 $0<p<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{Z_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant x\right\}=$（　　）。

A. $\int_0^x\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$　　B. $\int_{-\infty}^x\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$

C. $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ D. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

3. 设X_n为n次独立重复试验中事件A发生的次数，p是事件A在每次试验中发生的概率，则对任意的$\varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)=$（ ）。

A. 0 B. ε C. p D. 1

4. 设随机变量X_1，$X_2\cdots$，X_{100}独立同分布，$E(X_i)=0$，$D(X_i)=1$，$i=1$，2，…，100，则由中心极限定理得$P\left(\sum\limits_{i=1}^{100}X_i\leqslant 10\right)$近似等于（ ）。

A. 0 B. $\Phi(1)$ C. $\Phi(10)$ D. $\Phi(100)$

5. 设X_1，X_2，…，$X_n\cdots$为相互独立同分布的随机变量序列，且$E(X_i)=0$，$D(X_i)=1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\leqslant 0\right\}=$（ ）。

A. 0 B. 0.25 C. 0.5 D. 1

二、填空题

1. 设μ_n为n次独立重复试验中事件A发生的次数，p是事件A在每次试验中发生的概率，则对任意的$\varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\frac{\mu_n}{n}-p|<\varepsilon\}=$__________。

2. 设随机变量$X\sim B(100, 0.5)$，应用中心极限定理可算得$P\{40<X<60\}\approx$__________。（附：$\Phi(2)=0.9772$）

3. 设X_1，X_2，…，X_n是独立同分布随机变量序列，具有相同的数学期望和方差$E(X_i)=0$，$D(X_i)=1$，则当n充分大的时候，随机变量$Z_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$的概率分布近似服从________（标明参数）。

4. 设X_1，X_2，…，$X_n\cdots$是独立同分布的随机变量序列，$E(X_i)=\mu$，$D(X_i)=\sigma^2$，($i=1$，2，…)，则$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leqslant 0\right\}=$_______。

5. 设随机变量$X\sim N(2, 4)$，利用切比雪夫不等式估算概率$P(|X-2|\geqslant 3)\leqslant$_________。

6. 设随机变量x_1，x_2，…，x_n相互独立同分布，且$E(X_i)=\mu$，$D(X_i)=\sigma^2$，$i=1$，2…，则

$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} > 0\right\} =$ ________。

7. 设 X 为随机变量， $E(X)=0, D(X)=0.5$，则由切比雪夫不等式得 $P\{|X|\geqslant 1\}\leqslant$ ________。

8. 设随机变量 $X\sim U(0, 1)$，用切比雪夫不等式估计 $P\left(\left|X-\dfrac{1}{2}\right|\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\leqslant$ ________。

9. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$，相互独立且均服从参数为 $\lambda>0$ 的泊松分布，则当 n 充分大时， $Y=\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 近似地服从________分布。

10. 设随机变量 $X\sim N(1, 1)$，应用切比雪夫不等式估计概率 $P\{|X-E(X)|\geqslant 2\}\leqslant$ ________。

11. 设 m 为 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，p 为事件 A 的概率，则对任意正数 ε，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\dfrac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=$ ________。

三、计算题

某次抽样结果表明，考生的数学成绩（百分制）近似地服从正态分布 $X\sim N(75, \sigma^2)$，已知 85 分以上的考生数占考生总数的 5%，试求考生成绩在 65～85 分的概率.

【参考答案】

一、单项选择题

1.～5. CBABC

二、填空题

1.～5. 1；0.95；$N(0, 1)$；0.5；$\dfrac{4}{9}$；

6.～11. $\dfrac{1}{2}$；0.5；$\dfrac{1}{4}$；$N(n\lambda, n\lambda)$；0.25；1.

三、计算题

【解】设 X 为考生的数学成绩，则 X 近似地服从正态分布 $N(75, \sigma^2)$，

即 $\dfrac{X-75}{\sigma}$ 近似地服从正态分布 $N(0, 1)$，其中 σ 未知

因此 $$P(X>85)=P\left(\frac{X-75}{\sigma}>\frac{85-75}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{85-75}{\sigma}\right)=0.05$$

即 $$\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)=0.95$$

故所求概率为

$$P(65<X<85)=P\left(\frac{65-75}{\sigma}<\frac{X-75}{\sigma}<\frac{85-75}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)-1=0.9$$

第六章　统计量及其抽样分布

【考核要求】

了解总体、样本的概念，了解总体分布与样本分布的关系；理解统计量的概念（特别是样本均值、样本方差、样本矩）；了解 χ^2 分布、t 分布、F 分布的结构性定义及概率密度曲线的形状，理解分位数并能查表计算；掌握正态总体的抽样分布。

重点：常用统计量、正态总体的抽样分布。

难点：正态总体的抽样分布。

考点　常用统计量及其抽样分布

【考点内容】

1. 总体与样本

（1）总体与个体

研究对象的全体称为总体，记为 X；构成总体的每一个对象称为个体，记为 X_i。

（2）样本

从总体 X 中随机抽取 n 个个体，X_1，X_2，…，X_n，称为一个样本；n 称为样本容量。

（3）简单随机样本

具有以下两个特点的样本，称为简单随机样本：

① 每个个体 X_i 都与总体 X 同分布；

② 每个个体 X_1，X_2，…，X_n，相互独立。

我们所研究的样本都是简单随机样本。

2. 统计量及其分布

（1）统计量与抽样分布

设 X_1，X_2，…，X_n 是取自总体 X 的样本，若样本的函数 $T=T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 中不含有

任何未知参数，则称T为统计量。统计量的分布称为抽样分布。

（2）重要统计量

① 样本均值为 $$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

② 样本方差为 $$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

样本标准差为 $$S=\sqrt{S^2}$$

若总体X满足：$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，则有

$$E(\overline{X})=E(X)=\mu,\ D(\overline{X})=\frac{D(x)}{n}=\frac{\sigma^2}{n},\ E(S^2)=D(X)=\sigma^2$$

③ 样本矩

样本k阶原点矩为 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k$ （$k=1$时为$\overline{x}$）

样本k阶中心矩为 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^k$ （$k=2$时为S_n^2）

④ 极大顺序统计量与极小顺序统计量

极大顺序统计量为 $x_{(n)}=\max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

极小顺序统计量为 $x_{(1)}=\min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

3. 正态总体的抽样分布

（1）χ^2分布

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立且同分布于$N(0, 1)$，则

$$\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$$

服从自由度为n的分布，记为$\chi^2\sim\chi^2(n)$。

（2）F分布

设$X_1\sim\chi^2(m)$，$X_2\sim\chi^2(n)$，且X_1与X_2独立，则

$$F=\frac{X_1/m}{X_2/n}$$

服从自由度为m和n的F分布，记为$F\sim F(m, n)$。

（3）t分布

设$X_1\sim N(0, 1)$，$X_2\sim\chi^2(n)$，且X_1与X_2独立，则

$$t=\frac{X_1}{\sqrt{X_2/n}}$$

服从自由度为 n 的 t 分布，记为 $t \sim t(n)$。

（4）一个正态总体下的统计量

设 X_1，X_2，…，X_n 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，其样本均值和样本方差分别为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \text{ 和 } S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

则有：① $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ 或 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$；

② $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立；

③ $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$；

④ $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$。

【典型例题】

例 1　设 x_1，x_2，…，x_8 是从总体 $X \sim N(10, 3^2)$ 中抽取的样本，试求样本均值 $\bar{x}$ 的期望与标准差。

【解】 每个个体 $X_i \sim N(10, 3^2)$ $(i=1, 2, \cdots, 8)$

$$E(\bar{x})=E(x)=10$$

$$D(\bar{x})=\frac{D(x)}{n}=\frac{9}{8}, \sqrt{D(\bar{x})}=\sqrt{\frac{9}{8}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

例 2　设从总体 $X \sim N(40, 5^2)$ 中抽取容量为 36 的样本，试求样本均值 $P\{38 \leqslant \bar{x} \leqslant 43\}$。

【解】 $X \sim N(40, 5^2)$，$\overline{X} \sim N\left(40, \frac{5^2}{36}\right)$

则

$$P\{38 \leqslant \bar{x} \leqslant 43\}=\Phi\left(\frac{43-40}{5/6}\right)-\Phi\left(\frac{38-40}{5/6}\right)$$

$$=\Phi(3.6)-\Phi(-2.4)$$

$$=\Phi(3.6)+\Phi(2.4)-1 \approx 0.9916$$

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设随机变量 $X \sim \chi^2(2)$，$Y \sim \chi^2(3)$，且 X，Y 相互独立，则 $\dfrac{3X}{2Y}$ 所服从的分布为（　　）。

A. F（2，2）　B. F（2，3）　C. F（3，2）　D. F（3，3）

2. 设 X_1，X_2，…，X_n 为正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，记 $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$，则下列选项中正确的是（　　）。

A. $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$　B. $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$

C. $(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$　D. $\dfrac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

3. 设 X_1，X_2，…，X_{n_1} 与 Y_1，Y_2，…，Y_{n_2} 分别是来自总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 与 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 的两个样本，它们相互独立，且 $\overline{x}$，$\overline{y}$ 分别为两个样本的样本均值，则 $\overline{x} - \overline{y}$ 所服从的分布为（　　）。

A. $N\left(\mu_1 - \mu_2, \left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)\sigma^2\right)$　B. $N\left(\mu_1 - \mu_2, \left(\dfrac{1}{n_1} - \dfrac{1}{n_2}\right)\sigma^2\right)$

C. $N\left(\mu_1 - \mu_2, \left(\dfrac{1}{n_1^2} + \dfrac{1}{n_2^2}\right)\sigma^2\right)$　D. $N\left(\mu_1 - \mu_2, \left(\dfrac{1}{n_1^2} - \dfrac{1}{n_2^2}\right)\sigma^2\right)$

4. 设总体 X 的分布律为 $P\{X=1\} = p$，$P\{X=0\} = 1-p$，其中 $0 < p < 1$。设 X_1，X_2，…，X_n 为来自总体的样本，则样本均值 $\overline{X}$ 的标准差为（　　）。

A. $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$　B. $\dfrac{p(1-p)}{n}$　C. $\sqrt{np(1-p)}$　D. $np(1-p)$

5. 设随机变量 $X \sim N(0, 1)$，$Y \sim N(0, 1)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $X^2 + Y^2 \sim$（　　）。

A. $N(0, 2)$　B. $\chi^2(2)$　C. $t(2)$　D. $F(1, 1)$

6. 记 $F_{1-\alpha}(m, n)$ 为自由度 m 与 n 的 F 分布的 $1-\alpha$ 分位数，则有（　　）。

A. $F_\alpha(n, m) = \dfrac{1}{F_{1-\alpha}(m, n)}$　B. $F_{1-\alpha}(n, m) = \dfrac{1}{F_{1-\alpha}(m, n)}$

C. $F_\alpha(n, m) = \dfrac{1}{F_\alpha(m, n)}$　D. $F_\alpha(n, m) = \dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n, m)}$

7. 设 x_1，x_2，…，x_{100} 为来自总体 $X \sim N(0, 4^2)$ 的一个样本，以 $\overline{x}$ 表示样本均值，则 $\overline{x} \sim$（　　）。

A. N（0，16）　B. N（0，0.16）　C. N（0，0.04）　D. N（0，1.6）

8. 设总体 $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$，$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_{10}$ 是来自总体 X 的样本，$\bar{X}$ 为样本均值，则 $\bar{X} \sim$（　　）。

A. $N\left(\mu,\ 10\sigma^2\right)$　B. $N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$　C. $N\left(\mu,\ \dfrac{\sigma^2}{10}\right)$　D. $N\left(\mu,\ \dfrac{\sigma^2}{\sqrt{10}}\right)$

9. 设 $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ 为来自总体 X 的样本，$\bar{X}$ 为样本均值，则样本方差 $S^2=$（　　）。

A. $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$　　B. $\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

C. $\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$　　D. $\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$

二、填空题

1. 设总体 $X \sim N(0,1)$，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 为来自该总体的样本，则统计量 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$ 的抽样分布为__________。

2. 设总体 $X \sim N(1,\ \sigma^2)$，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 为来自该总体的样本，$\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，则 $E(\bar{x})=$__________。

3. 设总体 $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$，$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ 为来自总体的一个样本，令 $U=\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$，则 $D(U)=$__________。

4. 设总体 $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$，$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ 为来自总体 X 的样本，且 $\bar{x}=\dfrac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{4}x_i$，则 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2}$ 服从自由度为__________的 χ^2 分布。

5. 当随机变量 $F \sim F(m,\ n)$ 时，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，$P(F>F_a(m,\ n))=\alpha$．若 $F \sim F(10,\ 5)$，则 $P(F<\dfrac{1}{F_{0.95}(5,\ 10)})=$__________。

6. 设 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$ 的样本，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim$________（标出参数）。

7. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\ \sigma^2)$，总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\ \sigma^2)$，$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$

和Y_1，Y_2，…，Y_m分别是来自总体X和Y的简单随机样本，则$E\left[\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{i=1}^{m}(Y_i-\overline{Y})^2}{n+m-2}\right]=$

__________。

8. 设随机变量$F\sim F(n_1, n_2)$，则$\dfrac{1}{F}\sim$________。

9. 设总体$X\sim N(\mu, \sigma^2)$，X_1，X_2，…，X_{20}为来自总体X的样本，则$\sum\limits_{i=1}^{20}\dfrac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$服从参数为__________的$\chi^2$分布。

10. 总体X的概率密度$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x^2 & |x|<1\\ 0 & 其他\end{cases}$，$x_1$，$x_2$，…，$x_n$为来自总体$X$的样本，$\bar{x}$为样本均值，则$E(\bar{x})=$__________。

11. 设X_1，X_2，X_3，X_4为来自总体$X\sim N(0, 1)$的样本，设$Y=(X_1+X_2)^2+(X_3+X_4)^2$，则当$C=$________时，$CY\sim\chi^2(2)$。

12. 设随机变量$X\sim N(\mu, 2^2)$，$Y\sim\chi^2(n)$，$T=\dfrac{X-\mu}{2\sqrt{Y}}\sqrt{n}$，则$T$服从自由度为________的$t$分布。

13. 设总体$X\sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$X_1$，$X_2$，…，$X_n$为来自总体$X$的样本，$\bar{X}$为其样本均值；设总体$Y\sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，$Y_1$，$Y_2$，…，$Y_n$为来自总体$Y$的样本，$\bar{Y}$为其样本均值，且$X$与$Y$相互独立，则$D(\bar{X}+\bar{Y})=$_________。

【参考答案】

一、单项选择题

1.～5. BAAAB　　　　6.～9. ABCB

二、填空题

1.～5. $\chi^2(n)$；1；1；3；0.95

6.～10. $\chi^2(n)$；σ^2；$F(n_2, n_1)$；20；0

11.～13. $\dfrac{1}{2}$；n；$\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

【课后练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设 x_1，x_2，…，x_5 是来自正态总体 $N(\mu,\ \sigma^2)$ 的样本，其样本均值和样本方差分别为 $\bar{x}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i$ 和 $s^2=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2$，则 $\frac{\sqrt{5}(\bar{x}-\mu)}{s}$ 服从（　　）。

A. $t(4)$　　　B. $t(5)$　　　C. $\chi^2(4)$　　　D. $\chi^2(5)$

2. 设 x_1，x_2，x_3，x_4 为来自总体X的样本，$D(X)=\sigma^2$，则样本均值 $\bar{x}$ 的方差 $D(\bar{x})$ =（　　）。

A. σ^2　　　B. $\frac{1}{2}\sigma^2$　　　C. $\frac{1}{3}\sigma^2$　　　D. $\frac{1}{4}\sigma^2$

3. 设随机变量 $X\sim\chi^2(2)$，$Y\sim\chi^2(3)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $\frac{X/2}{Y/3}\sim$（　　）。

A. $\chi^2(5)$　　　B. $t(5)$　　　C. $F(2,\ 3)$　　　D. $F(3,\ 2)$

4. 设 x_1，x_2，…，x_n 是来自正态总体 $N(\mu,\ \sigma^2)$ 的样本，$\bar{x}$，s^2 分别为样本均值和样本方差，则 $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim$（　　）。

A. $\chi^2(n-1)$　　　B. $\chi^2(n)$　　　C. $t(n-1)$　　　D. $t(n)$

5. 设总体 $X\sim N(2,\ 3^2)$，x_1，x_2，…，x_n 为来自总体 X 的样本，$\bar{x}$ 为样本均值，则下列统计量中服从标准正态分布的是（　　）。

A. $\frac{\bar{x}-2}{3}$　　　B. $\frac{\bar{x}-2}{9}$　　　C. $\frac{\bar{x}-2}{3/\sqrt{n}}$　　　D. $\frac{\bar{x}-2}{9/\sqrt{n}}$

6. 设 x_1，x_2，…，x_n 为来自总体 $N(\mu,\ \sigma^2)$ 的样本，μ，σ^2 是未知参数，则下列样本函数为统计量的是（　　）。

A. $\sum_{i=1}^{n}x_i-\mu$　　　B. $\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$　　　C. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$　　　D. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$

二、填空题

1. 设随机变量 $X\sim N(0,\ 1)$，$Y\sim(0,\ 2^2)$ 相互独立，设 $Z=X^2+\frac{1}{C}Y^2$，则当 C=________时，$Z\sim\chi^2(2)$。

2. 设总体 $X\sim N(1,\ 4)$，x_1，x_2，…，x_{10} 为来自该总体的样本，$\bar{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i$，则 $D(\bar{x})=$ ________。

3. 设总体 $X \sim N(0,1)$， x_1，x_2，…，x_5 为来自该总体的样本，则 $\sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2$ 服从自由度为______的 χ^2 分布。

4. 设 X_1，X_2，⋯，X_n 是来自正态总体 $N(3,4)$ 的样本，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-3}{2}\right)^2 \sim$________。（标明参数）

5. 设随机变量 x_1，x_2，…，x_n 独立同分布于标准正态分布 $N(0, 1)$，则 $\chi^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 服从 χ^2 分布，自由度为________。

6. 设 x_1，x_2，…，x_n 为来自总体X的样本，且 $X \sim N(0, 1)$，则统计量 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \sim$_________。

7. 设随机变量 $X \sim \chi^2(n)$，$\chi_\alpha^2(n)$ 是自由度为 n 的 χ^2 分布的 α 分位数，则 $P\{X \leqslant \chi_\alpha^2(n)\} =$_________。

8. 设总体 $X \sim N(\mu, 64)$，x_1，x_2，…，x_8 为来自总体 X 的一个样本，$\bar{x}$ 为样本均值，则 $D(\bar{x}) =$__________。

9. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，x_1，x_2，…，x_n 为来自总体 X 的一个样本，$\bar{x}$ 为样本均值，s^2 为样本方差，则 $\dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ 服从__________。

10. 设样本 x_1，x_2，…，x_n 来自正态总体 $N(0, 9)$，其样本方差为 s^2，则$E\left(s^2\right) =$_________。

11. 设 x_1，x_2，…，x_{10} 为来自总体 X 的样本，且 $X \sim N\left(1, 2^2\right)$，$\bar{x}$ 为样本均值，则 $D(\bar{x}) =$_________。

12. 设从总体均值为 50，标准差为 8 的总体中，随机抽取容量为 64 的一组样本，则样本均值的方差 $D(\bar{x}) =$__________。

13. 设总体 X 服从二项分布 $B(2, 0.3)$，$E(\bar{x})$ 为样本均值，则 $E(\bar{x}) =$___________。

14. 设总体 $X \sim N(0, 1)$，x_1，x_2，x_3 为来自总体 X 的一个样本，且 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \sim \chi^2(n)$，则 $n =$___________。

15. 设 x_1，x_2，…，x_n 是来自总体 $P(\lambda)$ 的样本，$\bar{x}$ 是样本均值，则 $D(\bar{x}) =$___________。

【参考答案】

单项选择题

1.～6. ADCACD

二、填空题

1.～5. 4；0.4；5；$\chi^2(n)$；n

6.～10. $\chi^2(n)$；$1-\alpha$；8；$t(n-1)$；9

11.～15. $\frac{2}{5}$；1；0.6；3；$\frac{\lambda}{n}$

第七章　参数估计

【考核要求】

了解参数的点估计、估计量与估计值的概念；掌握矩估计、极大似然估计的方法；理解估计的无偏性的概念，了解有效性、相合性的概念；了解置信区间的概念；能求单个正态总体均值和方差的置信区间。

重点：矩估计和极大似然估计，单个正态总体均值与方差的区间估计。

难点：极大似然估计。

考点 1　点估计及估计的评价标准

【考点内容】

1. 矩估计法

矩估计法的本质是用样本矩估计总体矩，通常我们采用低阶矩给出未知参数的估计，最常见到的是：

用样本均值 $\bar{X}$ （样本的一阶原点矩）估计总体均值 $E(X)$（总体的一阶原点矩），即

$$E(\hat{X}) = \bar{X}$$

用样本二阶中心距估计 $D(X)$（总体的二阶中心矩），即

$$D(\hat{X}) = S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

2. 极大似然估计

极大似然估计，使得样本观测值出现的可能性为最大。

基本解题思路：

第一步，建立似然函数 $L(\theta)$。

对离散型总体，似然函数 $L(\theta)$ 为样本 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 出现的概率，即

$$L(\theta) = P(X_1 = x_1,\ X_2 = x_2,\ \cdots,\ X_n = x_n;\ \theta) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i;\ \theta)$$

对连续型总体，似然函数 $L(\theta)$ 为样本 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的联合概率密度，即

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$

第二步，写出对数似然函数 $\ln L(\theta)$，并对对数似然函数求导数，求得对数似然函数 $\ln L(\theta)$ 取得极大值时的 θ 取值，即 θ 的极大似然估计。

3. 点估计的评价标准

（1）无偏性

设 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 θ 的一个估计，若 $E(\hat{\theta}) = \theta$，则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计，否则称为有偏估计。

（2）有效性

设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 是 θ 的两个无偏估计，如果 $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效。

注意：只有对无偏估计，比较其有效性才有意义！

【典型例题】

例 1　设总体 X 服从参数为 λ 的指数分布，记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 为样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的样本均值，则总体参数 λ 的矩估计量为（　　）。

A. $\frac{1}{\overline{X}}$　　　B. $\overline{X}$　　　C. $2\overline{X}$　　　D. $\left(\overline{X}\right)^2$

【解】选 B. 由 $E(\hat{X}) = \overline{X}$ 可得：$\frac{1}{\lambda} = \overline{X}$，因此 $\lambda = \frac{1}{\overline{X}}$。

例 2　设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (\theta > 0)$$

试求：（1）θ 的矩估计；（2）θ 的极大似然估计。

【解】（1）$E(X) = \int_0^1 x\theta x^{\theta-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \theta x^{\theta}\,\mathrm{d}x = \frac{\theta}{\theta+1}$

由矩法估计得 $E(\hat{X}) = \overline{X}$，即 $\frac{\theta}{\theta+1} = \overline{X}$，求得 $\hat{\theta} = \frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$。

（2）对 $0 < x_i < 1\ (i = 1, 2, \cdots, n)$

似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) = \theta^n (\prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1})$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

求导得

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

解得 θ 的极大似然估计为

$$\hat{\theta}=-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}$$

例 3 设总体 $X\sim N(\mu,1)$，$-\infty<\mu<+\infty$，$(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 为其样本，试证下述三个估计量：

（1）$\hat{\mu}_1=\frac{1}{5}x_1+\frac{3}{10}x_2+\frac{1}{2}x_3$

（2）$\hat{\mu}_2=\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{4}x_2+\frac{5}{12}x_3$

（3）$\hat{\mu}_3=\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{6}x_2+\frac{1}{2}x_3$

都是 μ 的无偏估计，并求解哪个估计更有效？

【解】 $E(x_1)=E(x_2)=E(x_3)=\mu$，$D(x_1)=D(x_2)=D(x_3)=1$

$$E(\hat{\mu}_1)=E\left(\frac{1}{5}x_1+\frac{3}{10}x_2+\frac{1}{2}x_3\right)=\frac{1}{5}\mu+\frac{3}{10}\mu+\frac{1}{2}\mu=\mu$$

$$E(\hat{\mu}_2)=E\left(\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{4}x_2+\frac{5}{12}x_3\right)=\frac{1}{3}\mu+\frac{1}{4}\mu+\frac{5}{12}\mu=\mu$$

$$E(\hat{\mu}_3)=E\left(\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{6}x_2+\frac{1}{2}x_3\right)=\frac{1}{3}\mu+\frac{1}{6}\mu+\frac{1}{2}\mu=\mu$$

因此，$\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\hat{\mu}_3$ 都是 μ 的无偏估计，则

$$D(\hat{\mu}_1)=D\left(\frac{1}{5}x_1+\frac{3}{10}x_2+\frac{1}{2}x_3\right)=\frac{1}{25}+\frac{9}{100}+\frac{1}{4}=\frac{38}{100}$$

$$D(\hat{\mu}_2)=D\left(\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{4}x_2+\frac{5}{12}x_3\right)\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{25}{144}=\frac{50}{144}$$

$$D(\hat{\mu}_3)=D\left(\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{6}x_2+\frac{1}{2}x_3\right)=\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{4}=\frac{7}{18}$$

即 $D(\hat{\mu}_2)<D(\hat{\mu}_1)<D(\hat{\mu}_3)$，故 $\hat{\mu}_2$ 更有效。

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设总体 X 服从$[0，2\theta]$上的均匀分布$(\theta>0)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是来自该总体的样本，$\overline{x}$为样本均值，则θ的矩估计$\hat{\theta}=$（　　）。

A. $2\overline{x}$　　B. $\overline{x}$　　C. $\dfrac{\overline{x}}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2\overline{x}}$

2. 设总体$X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，$X_1,\ X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的样本，μ,σ^2均未知，则σ^2的无偏估计是（　　）。

A. $\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$　　B. $\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

C. $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$　　D. $\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

3. 设总体$X\sim N(\mu，\sigma^2)$，其中μ未知，$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$为来自总体X的一个样本，则以下关于μ的四个估计：$\hat{\mu}_1=\dfrac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)$，$\hat{\mu}_2=\dfrac{1}{5}x_1+\dfrac{1}{5}x_2+\dfrac{1}{5}x_3$，$\hat{\mu}_3=\dfrac{1}{6}x_1+\dfrac{2}{6}x_2$，$\hat{\mu}_4=\dfrac{1}{7}x_1$中，哪一个是无偏估计？（　　）

A. $\hat{\mu}_1$　　B. $\hat{\mu}_2$　　C. $\hat{\mu}_3$　　D. $\hat{\mu}_4$

二、填空题

1. 设总体X具有$[0，\theta]$上的均匀分布$(\theta>0)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是来自该总体的样本，则θ的矩估计$\hat{\theta}=$__________。

2. 设总体X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$为总体$X$的一个样本，则$\alpha$的矩估计$\hat{\alpha}=$__________。

3. 设总体X服从参数为λ的泊松分布，其中λ为未知参数。$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自该总体的一个样本，则参数λ的矩估计量为__________。

4. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，x_1,x_2,x_3为来自总体X的样本，则当常数$a=$__________时，$\hat{\mu}=\dfrac{1}{4}x_1+ax_2+\dfrac{1}{2}x_3$是未知参数$\mu$的无偏估计。

5. 总体$X\sim N(\mu,1)$，x_1,x_2,x_3为样本，若估计量$\hat{\mu}=\dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{1}{3}x_2+kx_3$为$\mu$的无偏估计量，则$k=$__________。

6. 设总体$X\sim N(\mu,2)$，x_1,x_2,x_3是来自总体X的简单随机样本，$\hat{\mu}_1$，$\hat{\mu}_2$是总体参数μ

的两个估计量，且 $\hat{\mu}_1=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{4}x_3$， $\hat{\mu}_2=\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3$，其中较有效的估计量是__________。

7. 假设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，0.8，1.3，1.1，0.6，1.2 是来自总体 X 的样本容量为 5 的简单随机样本，则 λ 的矩估计值为____________。

8. 设总体 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布，其概率密度为 $f(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$，由来自总体 X 的一个样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 算得样本平均值 $\bar{x}=9$，则参数 λ 的矩估计 $\hat{\lambda}=$________。

9. 设 $\hat{\theta}$ 是未知参数 θ 的一个估计量，若 $E(\hat{\theta})$____________，则 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计。

10. 设总体 X 服从参数为 λ（λ>0）的泊松分布，X_1,X_2，…，X_n 为 X 的一个样本，其样本均值 $\bar{x}=2$，则 λ 的矩估计值 $\hat{\lambda}=$__________。

11. 设总体 X 为指数分布，其密度函数为 $f(x;\lambda)=\lambda e^{-\lambda x}$，$x$>0，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本，故 λ 的矩估计 $\hat{\lambda}=$__________。

12. 假设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，其均值为 $\overline{X}$，样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$。已知 $\hat{\lambda}=a\overline{X}+(2-3a)S^2$ 为 λ 的无偏估计，则 a =__________。

三、计算题

1. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 X 的样本，总体 X 服从（0，θ）上的均匀分布，试求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}$，并计算当样本值为 0.2，0.3，0.5，0.1，0.6，0.3，0.2，0.2 时，$\hat{\theta}$ 的估计值。

2. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{-(\theta+1)} & x>1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $\theta(\theta>1)$ 是未知参数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自该总体的样本，试求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}$。

3. 设总体 X 服从指数分布，其概率密度为

$$f(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}，\text{其中 }\lambda>0\text{ 为未知参数}$$

$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本，求 λ 的极大似然估计。

4. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}，\text{其中 }\theta>0$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本。（1）求 $E(X)$；（2）未知参数 θ 的矩估计 $\hat{\theta}$。

【参考答案】

一、单项选择题

1.～3. BAA

二、填空题

1.～5. $2\overline{X}$；$\dfrac{1}{\overline{X}}$；$\overline{X}$；$\dfrac{1}{4}$；$\dfrac{1}{6}$

6.～10. $\hat{\mu}_2$；1；$\dfrac{1}{9}$；θ；2

11.～12. $\dfrac{1}{\overline{X}}$；$\dfrac{1}{2}$

三、计算题

1.（1）$\hat{\theta}=2\overline{X}$；（2）$\hat{\theta}=0.6$　　2. $\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$

3. $\dfrac{1}{\overline{X}}$　　4.（1）$E(X)=\theta$；（2）$\hat{\theta}=\overline{X}$

【课后练习及参考答案】

一、单项选择题

设 X_1，X_2，X_3 为总体 X 的样本，$T=\dfrac{1}{2}X_1+\dfrac{1}{6}X_2+kX_3$，已知 T 是 $E(X)$ 的无偏估计，则 $k=$（　　）。

A. $\dfrac{1}{6}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{4}{9}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

二、填空题

1. 设总体 X 服从区间（0，θ）上的均匀分布，x_1，$x_2,\cdots$，x_n 是来自总体 X 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，$\theta>0$ 为未知参数，则 θ 的矩估计 $\hat{\theta}=$___________。

2. 设总体 X 服从均匀分布 $U(\theta,2\theta)$，x_1，$x_2,\cdots$，x_n 是来自该总体的样本，则 θ 的矩估计 $\hat{\theta}=$__________。

3. 设总体 X 的分布为：$p_1=P(X=1)=\theta^2$，$p_2=P(X=2)=2\theta(1-\theta)$，$p_3=P(X=3)=(1-\theta)^2$，其中 $0<\theta<1$。现观测结果为 $\{1,2,2,1,2,3\}$，则 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}=$___________。

4. 设 x_1，$x_2,\cdots$，x_n 是来自总体 $B(20,p)$ 的样本，则 p 的矩估计 $\hat{p}=$__________。

5. 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)$，其中 θ 为未知参数，且 $E(X)=2\theta$，x_1，$x_2,\cdots$，x_n 为来自总体 X 的一个样本，$\bar{x}$ 为样本均值，若 $c\bar{x}$ 为 θ 的无偏估计，则常数 $c=$_________。

6. 设 x_1，$x_2,\cdots$，x_n 为来自总体 X 的样本，$E(X)=\mu$，μ 为未知参数，若 $C\sum_{i=1}^{n}x_i$ 为 μ 的无偏估计，则 $C=$____________。

7. 设 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 是未知参数 θ 的两个无偏估计，如果 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，则更为有效的估计是____________。

8. 设总体 $X\sim N(\mu,1)$，x_1，x_2 为来自总体 X 的一个样本，估计量 $\hat{\mu}_1=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2$，$\hat{\mu}_2=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2$，则方差较小的估计量是__________。

三、计算题

1. 设 x_1，$x_2,\cdots$，x_n 是总体 X 的样本，总体的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda x^{\lambda-1} & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}，\ \lambda>1$$

试求：（1）λ 的矩估计 $\hat{\lambda}_1$；（2）λ 的极大似然估计 $\hat{\lambda}_2$。

2. 设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}2\theta x^{2\theta-1} & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，其中未知参数 $\theta>0$，x_1，$x_2,\cdots$，x_n 为来自总体 X 的一个样本，求 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}$。

3. 设总体 X 的概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，其中未知参数 $\theta>-1$，x_1，$x_2,\cdots$，x_n 是来自该总体的一个样本，求参数 θ 的矩估计和极大似然估计。

4. 某电子元件的使用寿命 X(单位：小时)服从参数为 λ 的指数分布，其概率密度为

$$f(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases},\lambda>0$$

现抽取 n 个电子元件，测得其平均使用寿命 $\bar{x}$=1000，求 λ 的极大似然估计。

【参考答案】

一、单项选择题

B

二、填空题

1.～5. $2\overline{X}$；$\frac{2}{3}\overline{X}$；$\frac{7}{12}$；$\frac{1}{20}\overline{X}$；$\frac{1}{2}$。

6.～8. $\dfrac{1}{n}$；$\hat{\theta}_1$；$\hat{\mu}_1$。

三、计算题

1. 【解】（1）$E(X)=\int_0^1 x\lambda x^{\lambda-1}\mathrm{d}x=\dfrac{\lambda}{\lambda+1}x^{\lambda+1}\Big|_0^1=\dfrac{\lambda}{\lambda+1}$

因为$\overline{x}=E(X)=\dfrac{\lambda}{\lambda+1}$　所以$\hat{\lambda}_1=\dfrac{\overline{x}}{1-\overline{x}}$

（2）似然函数为$L(\lambda)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda x_i^{\lambda-1}$

取对数：

$$\ln L(\lambda)=n\ln\lambda+(\lambda-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

求导数：

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{n}{\lambda}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

λ的极大似然估计：

$$\hat{\lambda}_2=-\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}$$

2. 【解】似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}2\theta x_i^{2\theta-1}=(2\theta)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{2\theta-1}$$

取对数：

$$\ln L(\theta)=n\ln 2\theta+(2\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

求导数：

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta}+2\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

解得θ的极大似然估计：

$$\hat{\theta}=-\frac{n}{2\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}$$

3. 【解】（1）总体期望为

$$E(X)=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}\mathrm{d}x=\frac{\theta+1}{\theta+2}$$

令 $E(X)=\overline{X}$，即 $\dfrac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{x}$，则解得 θ 的矩估计为

$$\hat{\theta}=\frac{2\overline{x}-1}{1-\overline{x}}$$

（2）似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta}=(\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta}$$

取对数：

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

求导数：

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

解得 θ 的极大似然估计为

$$\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$$

4. **【解】**似然函数为

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x_i}=\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

取对数：

$$\ln L(\lambda)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$$

求导数：

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

解得 λ 的极大似然估计为

$$\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{\overline{x}}$$

考点 2　区间估计

【考点内容】

1. 置信区间的概念

设 θ 为总体的未知参数，$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2\ (x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是由样本 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 构造的两个统计量，若对于给定的概率 $1-\alpha(0<\alpha<1)$，有

$$P\left\{\hat{\theta}_1\leqslant\theta\leqslant\hat{\theta}_2\right\}=1-\alpha$$

则称随机区间 $\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right]$ 为参数 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间，称 $\hat{\theta}_1$ 为置信下限，称 $\hat{\theta}_2$ 为置信上限。

2. 单个正态总体的置信区间

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，

（1）当 σ^2 为已知时，μ 的置信度 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\overline{x}-\mu_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+\mu_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

（2）当 σ^2 为未知时，μ 的置信度 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\overline{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

（3）σ^2 的置信度 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$$

【典型例题】

例 1　从一个正态总体中抽取容量为 5 的样本，其观测值为 6.6，4.6，5.4，5.8，5.5，若置信度为 0.95，求：

（1）当方差 $\sigma^2=2$ 时 μ 的置信区间；

（2）当方差 σ^2 未知时 μ 的置信区间。

【解】 $\overline{X}=5.58,n=5$

（1）当方差 $\sigma^2=2$ 时 μ 的置信区间为 $\left[\bar{x}-\mu_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+\mu_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$，对 $\alpha=0.05,\mu_{\frac{\alpha}{2}}=\mu_{0.025}=1.96$ 时，μ 的置信区间为 $\left[5.58-1.96\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\ 5.58+1.96\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right]$，即 $[4.43,6.82]$。

（2）当方差未知时 μ 的置信区间为 $\left[\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$，对 $\alpha=0.05$，$t_{\frac{\alpha}{2}}(4)=t_{0.025}(4)=2.776$，又因为 $S=0.72$，因此 μ 的置信区间为 $\left[5.58-2.776\times\frac{0.72}{\sqrt{5}},\ 5.58+2.776\times\frac{0.72}{\sqrt{5}}\right]$，即 $[4.43,6.82]$。

【同步练习及参考答案】

一、填空题

1. 某实验室对一批建筑材料进行抗断强度试验，已知这批材料的抗断强度 $X\sim N(\mu,0.09)$，现从中抽取容量为 9 的样本观测值，计算出样本平均值 $\bar{x}=8.54$，已知 $\mu_{0.025}=1.96$，则置信度 0.95 时 μ 的置信区间为____________________。

2. 由来自正态总体 $X\sim N(\mu,0.9^2)$、容量为 9 的简单随机样本，得样本均值为 5，则未知参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是____________________。（$\mu_{0.025}=1.96$，$\mu_{0.05}=1.645$）

3. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 σ^2 未知，现由来自总体 X 的一个样本 $x_1,x_2,\cdots,x_9$ 算得样本均值 $\bar{x}=10$，样本标准差 $s=3$，并查得 $t_{0.025}(8)=2.3$，则 μ 的置信度为 95%置信区间是____________________。

4. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_{25}$ 是来自总体 X 的一个样本，$X\sim N(\mu,5^2)$，则 μ 的置信度为 0.90 的置信区间长度为____________________。（附：$\mu_{0.05}=1.645$）

5. 由来自正态总体 $X\sim N(\mu,1^2)$、容量为 100 的简单随机样本，得样本均值为 10，则未知参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是____________________。（$\mu_{0.025}=1.96$，$\mu_{0.05}=1.645$）

二、计算题

1. 用传统工艺加工某种水果罐头，每瓶中维生素 C 的含量为随机变量 X（单位：mg）。设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 均未知。现抽查 16 瓶罐头进行测试，测得维生素 C 的平均含量为 20.80mg，样本标准差为 1.60mg，试求 μ 的置信度 95%的置信区间。

（附：$t_{0.025}(15)=2.13$，$t_{0.025}(16)=2.12$。）

2. 设工厂生产的螺钉长度（单位：毫米）$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，现从一大批螺钉中任取 6 个，测得长度分别为 55，54，54，53，54，54。试求 σ^2 的置信度 90%的置信区间。

（附：$\chi^2_{0.05}(5)=11.07$，$\chi^2_{0.95}(5)=1.15$）

3. 一台自动车床加工的零件长度 X（单位：cm）服从正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从该车床加工的零件中随机抽取 4 个，测得样本方差 $s^2=2/15$，试求：总体方差 σ^2 的置信度为 95%的置信区间。（附：$\chi^2_{0.025}(3)=9.348,\chi^2_{0.975}(3)=0.216,\chi^2_{0.025}(4)=11.143$，$\chi^2_{0.975}(4)=0.484$）

【参考答案】

一、填空题

1. $[8.344,8.36]$；2. $[4.412,5.588]$；3. $[7.7,12.3]$；4. 3.29；5. $[9.804,10.196]$

二、计算题

1. $[19.948,21.652]$；2. $[0.181,1.739]$；3. $[0.043,1.852]$

【课后练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 从一个正态总体中随机抽取 $n=20$ 的一个随机样本，样本均值为17. 25，样本标准差为3.3，则总体均值 μ 的 95%的置信区间为（　　）。

A. $(15.97,18.53)$　　B. $(15.71,18.79)$

C. $(15.14,19.36)$　　D. $(14.89,20.45)$

2. 对总体参数进行区间估计，则下列结论正确的是（　　）。

A. 置信度越大，置信区间越长　　B. 置信度越大，置信区间越短

C. 置信度越小，置信区间越长　　D. 置信度大小与置信区间长度无关

二、填空题

1. 设总体 $X\sim N(\mu,4^2)$，容量为 16 的样本，均值为 53，则参数 μ 的 0.95 的置信区间是______________。（$\mu_{0.025}$=1.96，$\mu_{0.05}$=1.645）

2. 总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 已知，x_1，x_2,…，x_n 为总体的样本，$\bar{x}$ 为样本均值，则参数μ的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为___________。

3. 设总体服从正态分布 $X\sim N(\mu,1^2)$，从中抽取容量为 16 的样本，μ_α 是标准正态分布的上侧 α 分位数，则 μ 的置信度为 0.96 的置信区间长度是____________________。

三、计算题

1. 设某行业的一项经济指标服从正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 均未知。现获取了该指标的9个数据作为样本，并算得样本均值 $\bar{x}$=56.93，样本方差 s^2=$(0.93)^2$。求 μ 的置信度

为95%的置信区间。（附：$t_{0.025}(8)=2.306$）

2. 某生产车间随机抽取 9 件同型号的产品进行直径测量，得到结果$\overline{x}=21.6$，根据长期经验，该产品的直径服从正态分布$X\sim N(\mu,0.9^2)$，试求出该产品的直径μ的置信度为 0.95 的置信区间。（取 3 位小数）（附表：$u_{0.025}=1.96$，$u_{0.05}=1.645$）

3. 某生产车间随机抽取 9 件同型号的产品进行直径测量，得到结果如下：

21.54，21.63，21.62，21.96，21.42，21.57，21.63，21.55，21.48

根据长期经验，该产品的直径服从正态分布$X\sim N(\mu,0.9^2)$，试求出该产品的直径μ的置信度为 0.95 的置信区间。（$\mu_{0.025}$=1.96，$\mu_{0.05}$=1.645）（精确到小数点后 3 位）

4. 设某批建筑材料的抗弯强度$X\sim N(\mu,0.04)$，现从中抽取容量为 16 的样本，测得样本均值$\overline{x}=43$，求μ的置信度为0.95 的置信区间。（附：$\mu_{0.025}$=1.96）

【参考答案】

一、单项选择题

1.～2. BA

二、填空题

1. $[51.04\,,54.96]$；2. $\left[\overline{x}-u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$；3. $\dfrac{\mu_{0.02}}{2}$

三、计算题

1. **【解】**因为正态总体的方差σ^2未知，μ的置信度$1-\alpha$的置信区间为

$$\left[\overline{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

由$\overline{x}$=56.93，$s^2=(0.93)^2$，$n=9$，$\alpha=0.05$，$t_{0.025}(8)=2.306$

可得
$$\left[56.93-2.306\frac{0.93}{\sqrt{9}},56.93+2.306\frac{0.93}{\sqrt{9}}\right]=[56.22,57.64]$$

计算可得μ的置信度为95%的置信区间为$[56.22\,,57.64]$

2. **【解】**因方差已知，μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left[\overline{x}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

代入$\alpha=0.05,\quad \overline{x}=21.6,\quad \sigma=0.9,\quad n=9,\quad u_{0.025}=1.96$

则
$$\left[21.6-1.96\times\frac{0.9}{3},21.6+1.96\times\frac{0.9}{3}\right]=[21.012,22.188]$$

即所求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为[21.012, 22.188]。

3. 【解】$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

$$=\frac{21.54+21.63+21.62+21.96+21.42+}{9}$$

$$\frac{21.57+21.63+21.55+21.48}{9}$$

$$=21.60$$

因方差已知，μ 的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间为$\left[\overline{x}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

即 $$\overline{x}=21.60,\ \sigma=0.9,\ n=9,\ \alpha=1-0.95=0.05,\ \mu_{0.025}=1.96$$

故置信区间上下限为

$$\left[21.6-1.96\times\frac{0.9}{3}, 21.6+1.96\times\frac{0.9}{3}\right]=[21.012, 22.188]$$

所以置信区间为[21.012, 22.188]。

4. 【解】因为方差已知，μ 的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\overline{x}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

由题$\sigma=0.2, n=16, \overline{x}=43, \mu_{0.025}=1.96$ 可算得，μ 的 0.95 置信区间为

$$\left[43-\frac{0.2}{\sqrt{16}}\times1.96, 43+\frac{0.2}{\sqrt{16}}\times1.96\right]=[42.902, 43.098]$$

所以 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为[42.902, 43.098]。

第八章　假设检验

【考核要求】

了解假设检验的基本思想，掌握假设检验的基本步骤；掌握正态总体的均值及方差的假设检验。

重点：单个正态总体的均值与方差的假设检验。

难点：单个正态总体的均值与方差的假设检验。

考点　假设检验的求解方法

【考点内容】

1. 假设检验的基本思想和概念

（1）基本思想——“小概率事件在一次试验中几乎不可能发生”。

（2）基本概念

① 统计假设：对总体 X 的分布函数或所含的参数做出某种假设，称为统计假设，记为 H_0，也称为原假设；同时提出与 H_0 不同的假设，称为备择假设，记为 H_1。

② 检验统计量：为了检验 H_0 是否正确，构造一个与假设有关且分布已知的统计量，称为检验统计量。

③ 拒绝域和接受域：有检验统计量的分布，将样本空间划分为两个不相交的区域，其中一个由所有能接受 H_0 的样本值组成，称为接受域；另一个则为拒绝域，两者的分界点称为临界值。

④ 显著水平：事先给定一个较小的正数 α，使“H_0 成立时，做出拒绝 H_0 的决定”的概率不大于 α，称 α 为显著水平。

（3）两类错误

① 第一类错误（拒真错误）：当 H_0 成立时，拒绝 H_0，则犯了拒真错误

即
$$P\left\{拒绝H_0 \middle| H_0为真\right\}=\alpha$$

② 第二类错误（取伪错误）：当 H_0 不成立时，接受 H_0，则犯了取伪错误

即
$$P\{接受H_0 | H_0不真\}=\beta$$

注意：当样本容量固定时，一类错误的概率的减少将导致另一类错误的概率的增加，要想同时降低两类错误的概率，需要增大样本容量。

（4）假设检验的基本步骤

① 提出原假设 H_0，备择假设 H_1；

② 选取适当的检验统计量；

③ 在检验水平 α 下，表示拒绝域和接受域；

④ 计算统计量的值，并判断是否落入拒绝域内，从而做出推断。

2. 一个正态总体下的假设检验

设总体为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$。

（1）当 σ^2 已知时，μ 的检验——μ 检验法为

$$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$$

选取统计量：

$$\mu=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \text{（在 } H_0 \text{ 成立时）}$$

拒绝域为

$$(-\infty, -\mu_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (\mu_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty)$$

（2）当 σ^2 未知时，μ 的检验——t 检验法为

$$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$$

选取统计量：

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \text{（在 } H_0 \text{ 成立时）}$$

拒绝域为

$$(-\infty, -t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)) \cup (t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), +\infty)$$

（3）σ^2 的检验——χ^2 检验法为

$$H_0: \sigma^2 = {\sigma_0}^2, H_1: \sigma^2 \neq {\sigma_0}^2$$

选取统计量：

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2} \sim \chi^2(n-1) \text{（在 } H_0 \text{ 成立时）}$$

拒绝域为

$$(0,\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1))\cup(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),+\infty)$$

【典型例题】

例 1 某种零件的长度服从正态分布，现随机抽取 6 件，测得长度（单位：厘米）如下：

36.4，38.2，36.6，36.9，37.8，37.6

能否认为该种零件的平均长度为37 厘米？（$\alpha=0.05$，$t_{0.025}(5)=2.571$）

【解】提出假设：$H_0:\mu=37,H_1:\mu\neq 37$。

选取统计量：

$$t=\frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\sim t(5)\ （在H_0成立时）$$

在显著水平$\alpha=0.05$下，拒绝域为

$$(-\infty,-t_{0.025}(5))\cup(t_{0.025}(5),+\infty)$$

即

$$(-\infty,-2.571)\cup(2.571,+\infty)$$

又$\overline{x}=37.25,s=0.7204$，算得$t=\frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}=\frac{37.25-37}{0.7204/\sqrt{6}}=0.85\notin$拒绝域，所以接受$H_0$，认为平均长度为 37 厘米。

例 2 某种导线的电阻$X\sim N(\mu,0.005^2)$，现在从新生产的一批导线中抽取 9 根，测其电阻，得样本方差$s=0.008(\Omega)$，对$\alpha=0.05$，能否认为这批导线的电阻方差仍为0.005^2？

（$\chi^2_{0.025}(8)=17.5,\chi^2_{0.975}(8)=2.18$）

【解】提出假设：$H_0:\sigma^2=0.005^2,H_1:\sigma^2\neq 0.005^2$。

选取统计量：

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(8)（在成立时）$$

在显著水平$\alpha=0.05$下，拒绝域为

$$(0,\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(8))\cup(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(8),+\infty)$$

即

$$(0,2.18)\cup(17.5,+\infty)$$

又$s=0.008$，算得$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{8\times0.008^2}{0.005^2}=20.5\in$拒绝域，所以拒绝$H_0$，即不能认为这批导线的电阻方差仍为$0.005^2$。

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设总体 X 服从正态分布 N（μ，1），x_1，x_2，…，x_n 为来自该总体的样本，$\bar{x}$ 为样本均值，s 为样本标准差，欲检验假设 $H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$，则检验用的统计量是（　　）。

A. $\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$　　B. $\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)$　　C. $\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n-1}}$　　D. $\sqrt{n-1}(\bar{x}-\mu_0)$

2. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，X_1，X_2，…，X_n 为来自该总体的一个样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差。对假设检验问题：$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，在 σ^2 未知的情况下，应该选用的检验统计量为（　　）。

A. $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$　　B. $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n-1}$　　C. $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$　　D. $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n-1}$

3. 在假设检验问题中，犯第一类错误的概率 α 的意义是（　　）。

A. 在 H_0 不成立的条件下，经检验 H_0 被拒绝的概率

B. 在 H_0 不成立的条件下，经检验 H_0 被接受的概率

C. 在 H_0 成立的条件下，经检验 H_0 被拒绝的概率

D. 在 H_0 成立的条件下，经检验 H_0 被接受的概率

4. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 未知，$\overline{X}$ 为样本均值，$S_n^{\,2}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$S^{\,2}=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，检验假设 $H_0:\mu=\mu_0$ 时采用的统计量是（　　）。

A. $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$　　B. $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S_n/\sqrt{n}}$　　C. $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$　　D. $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

5. 对正态总体的数学期望 μ 进行假设检验，如果在显著水平 0.05 下接受 $H_0:\mu=\mu_0$，那么在显著水平 0.01 下，下列结论中正确的是（　　）。

A. 不接受，也不拒绝 H_0　　B. 可能接受 H_0，也可能拒绝 H_0

C. 必拒绝 H_0　　D. 必接受 H_0

二、填空题

1. 设样本 $x_1,x_2,\dots,x_n$ 来自正态总体 $X\sim N(\mu,9)$，假设检验问题为 $H_0:\mu=0,H_1:\mu\neq0$，则在显著性水平 α 下，检验的拒绝域 W=____________。

2. 设 0.05 是假设检验中犯第一类错误的概率，H_0 为原假设，则 P{拒绝 $H_0\,|\,H_0$ 真}=____________。

3. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，X_1，X_2，…，X_n 为来自该总体的一个样本。对假设检验问题 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$，在 μ 未知的情况下，应该选用的检验统计量为____________。

三、计算题

1. 假设某校考生数学成绩服从正态分布，随机抽取 25 位考生的数学成绩，算得平均成绩 $\bar{x} = 61$ 分，标准差 s=15 分。若在显著性水平 0.05 下是否可以认为全体考生的数学平均成绩为 70 分？（附：$t_{0.025}(24)=2.0639$）

2. 某日从饮料生产线随机抽取 16 瓶饮料，分别测得重量（单位：克）后算出样本均值 $\bar{x}$=502.92 及样本标准差 s=12。假设瓶装饮料的重量服从正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 σ^2 未知，问该日生产的瓶装饮料的平均重量是否为 500 克？（α=0.05）（附：$t_{0.025}(15)=2.13$）

3. 假设某城市购房业主的年龄服从正态分布，根据长期统计资料表明业主年龄 $X \sim N(35, 5^2)$。今年随机抽取 400 名业主进行统计调研，业主平均年龄为 30 岁。在 $\alpha = 0.01$ 下检验业主年龄是否显著减小。（$u_{0.01} = 2.32, u_{0.005} = 2.58$）

4. 设某商场的日营业额为 X 万元，已知在正常情况下 X 服从正态分布 $N(3.864, 0.2^2)$，十一黄金周的前五天营业额分别为 4.28，4.40，4.42，4.35，4.37（万元）。假设标准差不变，问十一黄金周是否显著增加了商场的营业额。（取 α=0.01，$\mu_{0.01}$=2.32，$\mu_{0.005}$=2.58）

5. 在生产中随机抽取 16 袋食盐，测得平均袋装重量 $\bar{x} = 496$。问在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，是否认为该厂生产的袋装食盐的平均袋重为 500g？（$u_{0.025} = 1.96$）

6. 某城市每天因交通事故伤亡的人数服从泊松分布，根据长期统计资料，每天伤亡人数均值为 3 人。近一年来，采用交通管理措施，据 300 天的统计，每天平均伤亡人数为 2.7 人。问能否认为每天平均伤亡人数显著减少？（$\mu_{0.025}$=1.96，$\mu_{0.05}$=1.645）

7. 已知某厂生产的一种元件，其寿命服从均值 μ_0=120，方差 $\sigma_0^2 = 9$ 的正态分布。现采用一种新工艺生产该种元件，并随机取 16 个元件，测得样本均值 $\bar{x}$=123，从生产情况看，寿命波动无变化。试判断采用新工艺生产的元件平均寿命较以往有无显著变化。（$\alpha = 0.05$）（附：$u_{0.025} = 1.96$）

8. 某公司对产品价格进行市场调查，如果顾客估价的调查结果与公司定价有较大差异，则需要调整产品定价。假定顾客对产品估价为 X 元，根据以往长期统计资料表明顾客对产品估价 $X \sim N(35, 10^2)$，所以公司定价为 35 元。今年随机抽取 400 个顾客进行统计调查，平均估价为 31 元。在 α=0.01 下检验估价是否显著降低，是否需要调整产品价格？（$u_{0.01}$=2.32，$u_{0.005}$=2.58）

9. 设某厂生产的零件长度为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$（单位：mm），现从生产出的一批零件中随机抽取了 16 件，经测量并算得零件长度的平均值 $\bar{x}=1960$，标准差 $s=120$，如果 σ^2 未知，在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，是否可以认为该厂生产的零件的平均长度是 2050mm?（$t_{0.025}(15)=2.131$）

【参考答案】

一、单项选择题

1.～5. BCCCB

二、填空题

1. $(-\infty, -\mu_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (\mu_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty)$；2. 0.05；3. $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2} \sim \chi^2(n-1)$

三、计算题

1. 不能认为全体考生的数学平均成绩为 70 分。
2. 瓶装饮料的平均重量是为 500 克。
3. 业主年龄显著减小。
4. 十一黄金周显著增加了商场的营业额。
5. 不能认为该厂生产的袋装食盐的平均袋重为 500g。
6. 认为每天平均伤亡人数显著减少。
7. 采用新工艺生产的元件平均寿命较以往有显著变化。
8. 需要调整产品价格，降低定价。
9. 不能认为该厂生产的零件的平均长度是 2050mm。

【课后练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ^2 未知，x_1，x_2，…，x_n 为样本，$s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$，检验假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ 时采用的统计量是（　　）。

A. $t = \dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$　　　B. $t = \dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n)$

C. $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$　　　D. $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n)$

2. 设总体 X 服从正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 σ^2 未知。x_1，x_2，…，x_n 为来自该总体的样本，$\bar{x}$ 为样本均值，s 为样本标准差，欲检验假设 $H_0: \mu = \mu_0$，$H_1: \mu \neq \mu_0$，则检验统计量为（　　）。

A. $\sqrt{n}\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}$　　B. $\sqrt{n}\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s}$　　C. $\sqrt{n-1}(\bar{x}-\mu_0)$　　D. $\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)$

3. 在假设检验中，H_0 为原假设，则显著性水平 α 的意义是（　　）。

A. P\{拒绝 H_0 | H_0 为真\}　　B. P \{接受 H_0 | H_0 为真\}

C. P \{接受 H_0 | H_0 不真\}　　D. P \{拒绝 H_0 | H_0 不真\}

4. 设样本 x_1，x_2，…，x_n 为来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，且 σ^2 未知。$\bar{x}$ 为样本均值，s^2 为样本方差。假设检验问题为 $H_0{:}\mu = 1, H_1{:}\mu \neq 1$，则采用的检验统计量为（　　）。

A. $\dfrac{\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}$　　B. $\dfrac{\bar{x}-1}{\sigma/\sqrt{n}}$　　C. $\dfrac{\bar{x}}{s/\sqrt{n}}$　　D. $\dfrac{\bar{x}-1}{s/\sqrt{n}}$

5. 在假设检验中，H_0 为原假设，H_1 为备择假设，则第一类错误是（　　）。

A. H_1 成立，拒绝 H_0　　B. H_0 成立，拒绝 H_0

C. H_1 成立，拒绝 H_1　　D. H_0 成立，拒绝 H_1

二、填空题

1. 在假设检验中，在原假设 H_0 不成立的情况下，样本值未落入拒绝域 W，从而接受 H_0，称这种错误为第________类错误。

2. 设两个正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^{\ 2})$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^{\ 2})$，其中 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 为未知，检验 H_0：$\mu_1 = \mu_2$，H_1：$\mu_1 \neq \mu_2$，分别从 X，Y 两个总体中取出 9 个和 16 个样本，其中，计算得 $\bar{x} = 572.3$，$\bar{y} = 569.1$，样本方差 $s_1^2 = 149.25$，$s_2^2 = 141.2$，则 t 检验中统计量 t =__________（要求计算出具体数值）。

3. 设样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 来自总体 $X \sim N(\mu, 25)$，假设检验问题为 $H_0: \mu = \mu_0$，$H_1: \mu \neq \mu_0$，则检验统计量为________________。

4. 对假设检验问题 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$，若给定显著水平 0.05，则该检验犯第一类错误的概率为____________。

5. 设某个假设检验的拒绝域为 W，当原假设 H_0 不成立的情况下，样本 x_1，x_2,…，x_n 落入 W 的概率是 0.8，则犯第二类错误的概率为____________。

6. 设假设检验的拒绝域为 W，当原假设 H_0 成立时，样本 x_1，x_2,…，x_n 落入 W 的概率为 0.1，则犯第一类错误的概率为____________。

7. 设总体 $X \sim N(\mu,4)$，x_1，$x_2,\ldots$，x_{16} 为来自总体 X 的一个样本，$\bar{x}$ 为样本均值，则检验假设 $H_0:\mu=1$，$H_1:\mu\neq 1$ 时应采用的检验统计量为__________________。

8. 在单边假设检验中，原假设为 H_0：$\mu\leqslant\mu_0$，则其备择假设为 H_1：_______________。

9. 设总体 X 服从正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 σ^2 未知，x_1，$x_2,\ldots$，x_n 为其样本。若假设检验问题为 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$，则采用的检验统计量表达式应为_______________。

10. 设总体 X 服从正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 未知，x_1，$x_2,\ldots$，x_n 为其样本，若检验假设为 H_0：$\sigma^2=1$，H_1：$\sigma^2\neq 1$，则采用的检验统计量应为___________。

11. 在假设检验中，犯第一类错误的概率为 0.01，则在原假设 H_0 成立的条件下，接受 H_0 的概率为____________。

12. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 σ^2 未知，x_1，$x_2,\ldots$，x_n 为来自总体的样本，$\bar{x}$ 和 s^2 分别是样本均值和样本方差，则检验假设 $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$ 采用的统计量表达式为_____________。

三、计算题

1. 某种产品用自动包装机包装，每袋重量 $X\sim N\left(500,\ 2^2\right)$（单位：g），生产过程中包装机工作是否正常要进行随机检验。某天开工后抽取了 9 袋产品，测得样本均值 $\bar{x}=502$ g。问：当方差不变时，这天包装机工作是否正常？$(\alpha=0.05)$(附：$u_{0.025}=1.96$)

2. 某厂生产的电视机在正常状况下的使用寿命为 X（单位：小时），且 $X\sim N(\mu,4)$。现调查了 10 台电视机的使用寿命，并算得其使用寿命的样本方差为 s^2=8.0。试问：能否认为这批电视机的使用寿命的方差仍为 4？（显著性水平 $\alpha=0.05$）

(附：$\chi^2_{0.025}(9)=19.0$，$\chi^2_{0.975}(9)=2.7$）

3. 设某车间生产铜丝的折断力指标 X 服从 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，现从产品中随机抽取 10 根，检查其折断力，测得数据如下（单位：公斤）

578，562，570，566，572，570，570，572，596，604

在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，检验现在产品折断力的方差是否与 64 有显著差异。

（$\chi^2_{0.025}(9)=19.0$，$\chi^2_{0.975}(9)=2.7$）

4. 按照质量要求，某果汁中的维生素含量应该超过 50（单位：毫克），现随机抽取 9 件同型号的产品进行测量，得到结果：45.1，47.6，52.2，46.9，49.4，50.3，44.6，47.5，48.4。根据长期经验和质量要求，该产品维生素含量服从正态分布 $X\sim N(\mu,1.5^2)$，在 $\alpha=0.01$ 下检验该产品维生素含量是否显著低于质量要求?（$u_{0.01}$=2.32，$u_{0.05}$=2.58）

5. 生产一种工业用绳，其质量指标是绳子所承受的最大拉力，假定该指标服从正态分布，原来生产的绳子指标均值为$\mu_0 = 15$ kg，采用一种新原材料后，厂方称这种原材料能提高绳子的质量，为检验厂方的结论是否真实，从其新产品中随机抽取50件，测得它们所承受的最大拉力的平均值为15.8 kg，样本标准差$s = 0.5$ kg。取显著性水平$\alpha = 0.01$，试问这些样本能否接受厂方的结论。（附表：$t_{0.01}(49) = 2.4049$，$t_{0.01}(50) = 2.4029$）

【参考答案】

一、单项选择题

1.～5. CBADB

二、填空题

1.～5. 二；0.64；$\frac{\sqrt{n}}{5}(\overline{X} - \mu_0) \sim N(0,1)$；0.05；0.2。

6.～10. 0.1；$\overline{X} - 1 \sim N(0,1)$；$\mu > \mu_0$；$\sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{S} \sim t(n-1)$。

$(n-1)s^2 \sim \chi^2(n-1)$；11～12. 0.99；$\sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sim N(0,1)$。

三、计算题

1. **【解】**依题意，做双侧检验。

提出假设：

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 500 \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 = 500$$

选取统计量：

$$u = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

在显著水平$\alpha = 0.05$下，拒绝域为

$$(-\infty, -\mu_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (\mu_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty)$$

即

$$(-\infty, -1.96) \cup (1.96, +\infty)$$

经计算得$u = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{502 - 500}{2/3} = 3 \in$拒绝域。故拒绝$H_0$，即可以认为这天包装机工作不正常。

2. **【解】**由题意，提出假设：

$$H_0 : \sigma^2 = 4, H_1 : \sigma^2 \neq 4$$

选取统计量：

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2}\sim\chi^2(n-1)\text{（在 }H_0\text{ 成立时）}$$

在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，拒绝域为

$$(0,\chi^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1))\cup(\chi^2{}_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),+\infty)$$

即 $(0,0.27)\cup(19.0,+\infty)$

经计算得 $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2}=\dfrac{9\times 8}{4}=18\notin$ 拒绝域

故不拒绝 H_0，即可以认为这批电视机的使用寿命的方差仍为 4。

3. 【解】$\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$

$$=\frac{578+562+570+566+572+}{10}$$

$$\frac{570+570+572+596+604}{10}$$

$=576$

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\frac{1624}{9}=180.44$$

提出假设：

$$H_0:\sigma^2=64,H_1:\sigma^2\neq 64$$

选取统计量：

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，拒绝域为

$$(0,\chi^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1))\cup(\chi^2{}_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),+\infty)$$

即 $(0,2.7)\cup(19.0,+\infty)$

经计算得 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}=25.4\in$ 拒绝域

所以拒绝 H_0，认为现在铜丝的折断力的方差与 64 有显著差异。

4. 【解】依题意，做单边检验：

提出假设：

$$H_0:\mu=\mu_0=50,H_1:\mu<\mu_0=50$$

选取统计量：

$$u=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

在显著水平 $\alpha=0.01$ 下，拒绝域为

$$(-\infty,-\mu_{0.01})$$

即 $(-\infty,-2.32)$

经计算得

$$u=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}=\frac{48-50}{1.5/\sqrt{9}}=-4\in\text{拒绝域}$$

因此拒绝 H_0，认为该产品维生素含量显著低于质量要求。

5. **【解】**依题意，做单侧检验：

提出假设：

$$H_0:\mu=\mu_0=15, H_1:\mu>\mu_0=15$$

选取统计量：

$$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(49)$$

在显著水平 $\alpha=0.01$ 下，拒绝域为

$$(t_{0.01}(49),+\infty)$$

即 $(2.4049,+\infty)$

经计算得 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\dfrac{15.8-15}{0.5/\sqrt{50}}=11.27\in$ 拒绝域

故拒绝 H_0，即认为新的原材料确实提高了绳子所能承受的最大拉力。

第九章　回归分析

【考核要求】

了解一元线性回归分析的基本思想，了解一元线性回归模型的假设条件，会用最小二乘法估计回归模型中的未知参数。

重点：最小二乘法。

难点：最小二乘法。

考点　回归方程

【考核内容】

1. 回归直线方程的建立

（1）基本概念

① 一元线性回归的数学模型

若有两个变量 x 和 y，其中 x 为非随机变量（即可控变量），y 为随机变量，且 x 和 y 有线性相关关系（也可称有线性回归关系），则可以用数学模型 $y=\beta_0+\beta_1 x+\varepsilon$ 近似地表示它们之间的关系，ε 是随机变量，且 $\varepsilon \sim N(0,\sigma^2)$。

② 一元线性回归方程及回归直线

求出 β_0 及 β_1 的点估计值 $\hat{\beta}_0$ 和 $\hat{\beta}_1$，则称方程 $y=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x$ 为关于 y 的一元线性回归方程，其图像（直线）称为回归直线，称 $\hat{\beta}_1$ 为回归系数，称 $\hat{\beta}_0$ 为回归常数。

（2）建立回归直线方程的方法——最小二乘法

选 $\hat{\beta}_0$ 及 $\hat{\beta}_1$，使 $Q=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1 x)^2$ 为最小。

（3）回归直线方程的计算

记 $L_{xx}=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-n\bar{x}^2$

$$L_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}$$

可求得 $\hat{\beta}_1=\dfrac{L_{xy}}{L_{xx}}$， $\hat{\beta}_0=\overline{y}-\hat{\beta}_1\overline{x}$

因此，回归直线方程为 $\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x$

2. 回归直线方程的显著性检验

$$H_0:\beta_1=0, H_1:\beta_1\neq 0$$

选取统计量：

$$F=\frac{S_{回}}{S_{剩}/n-2}\sim F(1,n-2)\text{（在 }H_0\text{ 成立时）}$$

式中 $S_{回}=\hat{\beta}_1L_{xy}=\dfrac{(L_{xy})^2}{L_{xx}}$

$$S_{剩}=S_T-S_{回}=L_{yy}-S_{回}$$

拒绝域为 $(F_\alpha(1,n-2),+\infty)$

【典型例题】

例 1 某种合金的抗拉强度 $y(\mathrm{kg}/\mathrm{m}^2)$ 与合金中的含碳量 $x(\%)$ 有关系，由实验获得的一组数据 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,9)$，整理后得 $\sum_{i=1}^{9}x_i=1.26, \sum_{i=1}^{9}y_i=426.5, \sum_{i=1}^{9}x_i^2=0.1824,$ $\sum_{i=1}^{9}x_iy_i=60.55$，求 y 对 x 的线性回归方程。

【解】 由题 $n=9$， $\overline{x}=0.14$， $\overline{y}=47.39$

$$L_{xx}=\sum_{i=1}^{9}x_i^2-n\overline{x}^2=0.006\text{，}\quad L_{xy}=\sum_{i=1}^{9}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}=0.84$$

可求得：$\hat{\beta}_1=\dfrac{L_{xy}}{L_{xx}}=140$， $\hat{\beta}_0=\overline{y}-\hat{\beta}_1\overline{x}=27.79$

因此，回归直线方程为： $\hat{y}=27.79+140x$。

【同步练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 设有一组观测数据 $(x_i, y_i)(i=1, 2, \cdots, n)$，其散点图呈线性趋势，若要拟合一元线性回归方程 $\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x$，且 $\hat{y}_i=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_i, i=1, 2, \cdots, n$，则估计参数 β_0, β_1 时应使（　　）。

A. $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)$ 最小　　B. $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)$ 最大

C. $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ 最小　　D. $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ 最大

2. 要检验变量 y 和 x 之间的线性关系是否显著，即考察由一组观测数据 (x_i, y_i) $(i=1, 2, \cdots, n)$ 得到的回归方程 $\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x$ 是否有实际意义，需要检验假设（　　）。

A. $H_0:\beta_0=0,\ H_1:\beta_0\neq 0$　　B. $H_0:\beta_1=0,\ H_1:\beta_1\neq 0$

C. $H_0:\hat{\beta}_0=0,\ H_1:\hat{\beta}_0\neq 0$　　D. $H_0:\hat{\beta}_1=0,\ H_1:\hat{\beta}_1\neq 0$

二、填空题

1. 某公司研发了一种新产品，选择了 n 个地区 A_1，A_2，…，A_n 进行独立试销。已知地区 A_i 投入的广告费为 x_i，获得的销售量为 y_i，$i=1$，2，…，n。研发人员发现 (x_i, y_i) $(i=1, 2, \cdots, n)$ 满足一元线性回归模型

$$\begin{cases} y_i=\beta_0+\beta_{1x_i}+\varepsilon_i & i=1, 2, \cdots, n \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n & \text{相互独立，具有相同分布} N(0, \sigma^2) \end{cases}$$

则 β_1 的最小二乘估计 $\hat{\beta}_1=$____________。

2. 已知一元线性回归方程为 $\hat{y}=\hat{\beta}_0+4x$, 且 $\bar{x}=3, \bar{y}=6$，则 $\hat{\beta}_0=$ ____________。

3. 设由一组观测数据 $(x_i, y_i)(i=1, 2, \cdots, n)$ 计算得 $\bar{x}=150$，$\bar{y}=200$，$L_{xx}=25$，$L_{xy}=75$，则 y 对 x 的线性回归方程为______________。

4. 已知一元线性回归方程为 $\hat{y}=1+\hat{\beta}_1 x$，且 $\bar{x}=2, \bar{y}=9$，则 $\hat{\beta}_1=$____________。

【参考答案】

一、单项选择题

1.～2. CB

二、填空题

1.～4. $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$；$-6$；$\hat{y}=3x-250$；4。

【课后练习及参考答案】

一、单项选择题

1. 已知一元线性回归方程为 $\hat{y}=6+\hat{\beta}_1 x$，且 $\bar{x}=2$，$\bar{y}=4$，则 $\hat{\beta}_1=$（　　）。

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

2. 设一元线性回归模型：$y_i=\beta_0+\beta_1x_i+\varepsilon_i(i=1, 2, \cdots, n)$，$\varepsilon_i\sim N(0, \sigma^2)$ 且各 ε_i 相互独立.依据样本 $(x_i, y_i)(i=1, 2, \cdots, n)$ 得到一元线性回归方程 $\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x$，由此得 x_i 对应的回归值为 $\hat{y}_i$，y_i 的平均值 $\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i(\overline{y}\neq 0)$，则回归平方和 $S_{回}$ 为（　　）。

A. $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$　　B. $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$

C. $\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\overline{y})^2$　　D. $\sum_{i=1}^{n}\hat{y}_i^{\,2}$

二、填空题

1. 已知一元线性回归方程为 $y=\beta_0+5x$，且 $\overline{x}=2$，$\overline{y}=6$，则 $\beta_0=$__________。

2. 已知一元线性回归方程为 $\hat{y}=3+\hat{\beta}_1x$，且 $\overline{x}=1$，$\overline{y}=6$，则 $\hat{\beta}_1=$__________。

3. 设 x_1，x_2，…，x_n 为样本观测值，经计算知 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=100$，$n\overline{x}^2=64$，则 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=$__________。

4. 设一元线性回归模型为 $y_i=\beta_0+\beta_1x_i+\varepsilon_i$，$i=1, 2, \cdots, n$，则 $E(y_i)=$____________。

5. 设一组观测数据 $(x_i, y_i)(i=1, 2, \cdots, n)$，算得：$\overline{x}=150$，$\overline{y}=200$，$l_{xx}=25$，$l_{xy}=75$，则 y 对 x 的线性回归方程为__________。

三、计算题

设变量 y 与 x 的观测数据 $(x_i, y_i)(i=1, 2, \cdots, 10)$ 大体上散布在某条直线的附近，经计算得出 $\overline{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=25, \overline{y}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}y_i=350$，$\sum_{i=1}^{10}x_iy_i=88700$，$\sum_{i=1}^{10}x_i^2=8250$。试用最小二乘法建立 y 对 x 的线性回归方程。

【参考答案】

一、单项选择题

1.～2. AC

二、填空题

1.～5. -4；3；36；$\beta_0+\beta_1x$；$\hat{y}=3x-250$。

三、计算题

【解】$l_{xx}=\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\overline{x}^2=8250-10\times 25^2=2000$

$$l_{xy}=\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-10\overline{x}\ \overline{y}=88700-10\times25\times350=1200$$

可求得：

$$\widehat{\beta}_1=\frac{l_{xy}}{l_{xx}}=\frac{1200}{2000}=0.6$$

$$\widehat{\beta}_0=\overline{y}-\hat{\beta}_1\overline{x}=350-0.6\times25=335$$

故线性回归方程为$\hat{y}=335+0.6x$

第二部分　历年真题

全国 2012 年 1 月高等教育自学考试
概率论与数理统计（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. 从一批产品中随机抽两次，每次抽 1 件。以 A 表示事件“两次都抽得正品”，B 表示事件“至少抽得一件次品”，则下列关系式中正确的是（　　）。

A. $A=\overline{B}$　　B. $A=B$　　C. $A\subset B$　　D. $B\subset A$

2. 某人射击三次，其命中率为 0.8，则三次中至多命中一次的概率为（　　）。

A. 0.002　　B. 0.04　　C. 0.08　　D. 0.104

3. 设 A 与 B 相互独立，$P(A)=0.2, P(B)=0.4$，则 $P(\overline{A}\,|\,B)=$（　　）。

A. 0.2　　B. 0.4　　C. 0.6　　D. 0. 8

4. 设随机变量 X 服从泊松分布，且已知 $P(X=1)=P(X=2)$，则 $F(X=3)=$（　　）。

A. $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-1}$　　B. $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2}$　　C. $\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2}$　　D. $\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2}$

5. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}K\left(4x-2x^2\right) & 1<x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，则 $K=$（　　）。

A. $\frac{5}{16}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{5}$

6. 二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & x^2+y^2<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，则随机变量 X 与 Y 为（　　）。

A. 独立同分布　　B. 独立不同分布　C. 不独立同分布　D. 不独立不同分布

7. 设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.2	0
1	0.3	0.1	0.1
2	0.1	0	0.1

则 $P(X=Y)=$（　　）。

A. 0.3　　B. 0.5　　C. 0.7　　D. 0.8

8. 设随机变量 $X \sim N(-1,3)$，$Y \sim N(1,2)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $X+2Y \sim$（　　）。

A. $N(1,10)$　　B. $N(1,11)$　　C. $N(1,5)$　　D. $N(1,7)$

9. 设随机变量 X 服从参数 p 的两点分布，若随机变量 X 取值为 1 的概率 p 为取值为 0 的概率 q 的 3 倍，则方差 $D(X)=$（　　）。

A. $\frac{3}{16}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. 3

10. 从一个正态总体中随机抽取 $n=20$ 的一个随机样本，样本均值为17. 25，样本标准差为3.3，则总体均值 μ 的95%的置信区间为（　　）。

A. $(15.97, 18.53)$　　B. $(15.71, 18.79)$

C. $(15.14, 19.36)$　　D. $(14.89, 20.45)$

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）请在每小题的空格中填上正确答案. 错填、不填均无分。

11. 若1, 2, 3, 4, 5 号运动员随机排成一排，则 1 号运动员站在正中间的概率为_________。

12. 一口袋装有 3 只红球、2 只黑球，现从中任意取出 2 只球，则这两只恰为一红一黑的概率是_________。

13. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-3x} & x>0 \\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$，则 $P(x>1)=$_________。

14. 已知离散型随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2
P	1/3	1/6	1/2

X 的分布函数值 $F\left(\frac{3}{2}\right)=$_________。

15. 设随机变量 $X \sim B(3,0.2)$，且随机变 $Y=\frac{X(3-X)}{2}$，则 $P(Y=0)=$_________。

16. 已知当 $0<x<1, 0<y<1$ 时，随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)\ x^2y^2$，(X,Y) 概率密度记为 $f(x,y)$，则 $f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=$_________。

17. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,\ y)=\begin{cases}8xy & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，随机变量 Y 的边

缘概率密度 $f_Y(y)$ 在 $y=\dfrac{1}{2}$ 处的值等于__________。

18. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，它们的分布律分别为

X	-1	0	1
P	$1/3$	$1/4$	$5/12$

Y	-1	0
P	$1/4$	$3/4$

则 $P\{X+Y=0\}=$__________。

19. 设随机变量 X 服从 $[2,5]$ 上的均匀分布，则 $E(X)=$__________。

20. 设 X,Y 为随机变量，已知 $D(X)=4, D(Y)=9$，$\mathrm{Cov}(X,Y)=5$，则 $D(X+Y)=$__________。

21. 假设随机变量 $X\sim U(0,1)$，用切比雪夫不等式估计 $P\left(|X-\dfrac{1}{2}|\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\leqslant$__________。

22. 假设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$，相互独立且均服从参数为 $\lambda>0$ 的泊松分布，则当 n 充分大时，$Y=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 近似地服从__________分布。

23. 假设从总体平均值为 50、标准差为 8 的总体中，随机抽取容量为 64 的一组样本，则样本均值的方差 $D(\overline{X})=$__________。

24. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 未知，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为其样本，若检验假设为 H_0：$\sigma^2=1$，H_1：$\sigma^2\neq1$，则采用的检验统计量应为__________。

25. 设一组观测数据 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 算得 $\overline{x}=150,\overline{y}=200$，$l_{xx}=25,l_{xy}=75$，则 y 对 x 线性回归方程为__________。

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. 由历史记录知，某地区年总降雨量是一个随机变量，且此随机变量 $X\sim N\left(500,100^2\right)$（单位：mm）。求：

（1）明年总降雨量为 400～600mm 的概率；

（2）明年总降雨量小于何值的概率为 0.1?（$\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(1.28)\approx0.9$）

27. 某生产车间随机抽取 9 件同型号的产品进行直径测量，得到结果 $\overline{x}=21.6$，根据长期经验，该产品的直径服从正态分布 $N(\mu,0.9^2)$，试求出该产品的直径 μ 的置信度为 0.95 的置信区间。（取到小数点后 3 位）

（附表：$u_{0.025}=1.96$，$u_{0.05}=1.645$）

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. 设在某条国道上行驶的高速客车与一般客车的数量之比为$1:4$，假设高速客车因发生故障需要停驶检修的概率为 0.002，一般客车因发生故障需要停驶检修的概率为 0.01。

（1）求该国道上有客车因发生故障需要停驶检修的概率；

（2）已知该国道上有一辆客车因发生故障需要停驶检修，问这辆客车是高速客车的可能性有多大？

29. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} ax & 0<x<2 \\ cx+b & 2\leqslant x\leqslant 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，已知 $E(X)=2$，$P(1<X<3)=\dfrac{3}{4}$，

求：（1）a,b,c；（2）$E(\mathrm{e}^X)$。

五、应用题（本大题共 1 小题，10 分）

30. 生产一种工业用绳，其质量指标是绳子所承受的最大拉力，假定该指标服从正态分布，原来生产的绳子指标均值 $\mu_0=15$ 千克，采用一种新型原材料后，厂方称这种原材料能提高绳子的质量，为检验厂方的结论是否真实，从其新产品中随机抽取 45 件，测得它们所承受的最大拉力的平均值为15.8千克，样本标准差 $s=0.5$ 千克。取显著性水平 $\alpha=0.01$，试问这些样本能否接受厂方的结论。（附表：$t_{0.01}(49)=2.4049$，$t_{0.01}(50)=2.4029$）

全国 2012 年 4 月高等教育自学考试
概率论与数理统计（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. 设 A,B 为随机事件，且 $A\subset B$，则 $\overline{AB}$ 等于（　　）。

A. $\overline{A}\overline{B}$　　B. $\overline{B}$　　C. $\overline{A}$　　D. A

2. 设 A,B 为随机事件，则 $P(A-B)=$（　　）。

A. $P(A)-P(B)$　　B. $P(A)-P(AB)$

C. $P(A)-P(B)+P(AB)$　　D. $P(A)+P(B)-P(AB)$

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & 3<x<6\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，则 $P\{3<X\leqslant 4\}=$（　　）。

A. $P\{1<X\leqslant 2\}$　　B. $P\{4<X\leqslant 5\}$　　C. $P\{3<X\leqslant 5\}$　　D. $P\{2<X\leqslant 7\}$

4. 已知随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 X 的分布函数为（　　）。

A. $F(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$　　B. $F(x)=\begin{cases}1-\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$　　D. $F(x)=\begin{cases}1+e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$

5. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，则（　　）。

A. $F(-\infty)=1$　　B. $F(0)=0$　　C. $F(+\infty)=0$　　D. $F(+\infty)=1$

6. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，它们的概率密度分别为 $f_X(x),f_Y(y)$，则 (X,Y) 的概率密度为（　　）。

A. $\dfrac{1}{2}[f_X(x)+f_Y(y)]$　　B. $f_X(x)+f_Y(y)$

C. $\dfrac{1}{2}f_X(x)f_Y(y)$　　D. $f_X(x)f_Y(y)$

7. 设随机变量 $X\sim B(n,p)$，且 $E(X)=2.4,D(X)=1.44$，则参数 n,p 的值分别为（　　）。

A. 4 和 0.6　　B. 6 和 0.4　　C. 8 和 0.3　　D. 3 和 0.8

8. 设随机变量 X 的方差 $D(X)$ 存在，且 $D(X)>0$，令 $Y=-X$，则 $\rho_{XY}=$（　　）。

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

9. 设总体 $X\sim N(2,3^2),x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 X 的样本，$\overline{x}$ 为样本均值，则下列统计量中服从标准正态分布的是（　　）。

A. $\dfrac{\overline{x}-2}{3}$　　B. $\dfrac{\overline{x}-2}{9}$　　C. $\dfrac{\overline{x}-2}{3/\sqrt{n}}$　　D. $\dfrac{\overline{x}-2}{9/\sqrt{n}}$

10. 设样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，且 σ^2 未知。$\overline{x}$ 为样本均值，s^2 为样本方差.假设检验问题为 $H_0:\mu=1,H_1:\mu\neq1$，则采用的检验统计量为（　　）。

A. $\dfrac{\overline{x}}{\sigma/\sqrt{n}}$　　B. $\dfrac{\overline{x}-1}{\sigma/\sqrt{n}}$　　C. $\dfrac{\overline{x}}{s/\sqrt{n}}$　　D. $\dfrac{\overline{x}-1}{s/\sqrt{n}}$

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. 在一次读书活动中，某同学从 2 本科技书和 4 本文艺书中任选 2 本，则选中的书都是科技书的概率为______。

12. 设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(A)=0.5,P(A\overline{B})=0.3$，则 $P(B)=$______。

13. 设 A，B 为随机事件，$P(A)=0.5,P(B)=0.4,P(A|B)=0.8$，则 $P(B|A)=$______。

14. 设袋中有 2 个黑球、3 个白球，有放回地连续取 2 次球，每次取一个，则至少取到一个黑球的概率是______。

15. 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.3	0.4

则 $P(X\geqslant1)=$ ______。

16. 设二维随机变量 $(X，Y)$ 在区域 D 上服从均匀分布，其中 $D:0\leqslant x\leqslant2,0\leqslant y\leqslant2$。$(X，Y)$ 的概率密度记为 $f(x，y)$，则 $f(1,1)=$______。

17. 设二维随机变量 $(X，Y)$ 的分布律为

X \ Y	0	1	2
0	0.3	0.1	0.2
1	0	0.1	0.3

则 $P\{X=Y\}=$ ______。

18. 设二维随机变量 $(X，Y)$ 的分布函数为 $F(x，y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{-y}) & x>0,y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$，则 $P\{X\leqslant1,Y\leqslant1\}=$______。

19. 设随机变量 X 服从参数为 3 的泊松分布，则 $E\left(X-3\right)=$______。

20. 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1
P	a	b	0.4

a,b 为常数，且 $E\left(X\right)=0$，则 $a-b=$______。

21. 设随机变量 $X\sim N(1,1)$，应用切比雪夫不等式估计概率 $P\left\{\left|X-E(X)\right|\geqslant 2\right\}\leqslant$______。

22. 设总体 X 服从二项分布 $B(2,0.3)$，$\bar{x}$ 为样本均值，则 $E(\bar{x})=$______。

23. 设总体 $X\sim N\left(0,1\right)$，x_1，x_2，x_3 为来自总体 X 的一个样本，且 $x_1^2+x_2^2+x_3^2\sim\chi^2(n)$，则 $n=$ ______。

24. 设总体 $X\sim N\left(\mu,1\right)$，$x_1$，$x_2$ 为来自总体 X 的一个样本，估计量 $\hat{\mu}_1=\dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{1}{2}x_2$，$\hat{\mu}_2=\dfrac{1}{3}x_1+\dfrac{2}{3}x_2$，则方差较小的估计量是______。

25. 在假设检验中，犯第一类错误的概率为 0.01，则在原假设 H_0 成立的条件下，接受 H_0 的概率为______。

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. 设随机变量 X 的概率密度为 $f\left(x\right)=\begin{cases}cx^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & 其他\end{cases}$，求：

（1）常数 c；（2）X 的分布函数 $F\left(x\right)$；（3）$P\left\{0<x<\dfrac{1}{2}\right\}$。

27. 设二维随机变量（X，Y）的分布律为

$X\backslash Y$	-1	0	1
0	0.2	0.1	0.3
1	0.1	0.2	0.1

求：（1）（X，Y）关于 X 的边缘分布律；（2）$X+Y$ 的分布律。

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从标准正态分布，令 $\xi=X+Y,\eta=X-Y$。

求：（1）$E(\xi),E(\eta),D(\xi),D(\eta)$；（2）$\rho_{\xi\eta}$。

29. 设总体 X 的概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$，其中未知参数 $\theta>-1$，$x_1,x_2,\ldots,x_n$ 是来自该总体的一个样本，求参数 θ 的矩估计和极大似然估计。

五、应用题（10 分）

30. 某生产线上的产品按质量情况分为 A，B，C 三类。检验员定时从该生产线上任取 2 件产品进行抽检，若发现其中两件全是 A 类产品或一件 A 类一件 B 类产品，就不需要调试设备，否则需要调试。已知该生产线上生产的每件产品为 A 类品、B 类品和 C 类品的概率分别为 0.9，0.05 和 0.05，且各件产品的质量情况互不影响。求：

（1）抽到的两件产品都为 B 类产品的概率 P_1；

（2）抽检后设备不需要调试的概率 P_2。

全国 2012 年 10 月高等教育自学考试
概率论与数理统计（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. 已知事件 $A, B, A\cup B$ 的概率分别为 0.5，0.4，0.6，则 $P(A\overline{B})=$（　　）。

A. 0.1　　B. 0.2　　C. 0.3　　D. 0.5

2. 设 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数，则有（　　）。

A. $F(-\infty)=0, F(+\infty)=0$　　B. $F(-\infty)=1, F(+\infty)=0$

C. $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$　　D. $F(-\infty)=1, F(+\infty)=1$

3. 设二维随机变量（X，Y）服从区域 $D: x^2+y^2\leqslant 1$ 上的均匀分布，则（X，Y）的概率密度为（　　）。

A. $f(x, y)=1$　　B. $f(x, y)=\begin{cases}1 & (x, y)\in D\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

C. $f(x, y)=\dfrac{1}{\pi}$　　D. $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & (x, y)\in D\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

4. 设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，则 $E(2X-1)=$（　　）。

A. 0　　B. 1　　C. 3　　D. 4

5. 设二维随机变量（X，Y）的分布律为

$X \backslash Y$	0	1
1	1/2	1/6
2	1/6	1/6

则 $D(3X)=$（　　）。

A. $\dfrac{2}{9}$　　B. 2　　C. 4　　D. 6

6. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 为相互独立同分布的随机变量序列，且 $E(X_1)=0, D(X_1)=1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \leqslant 0\right\}=$（　　）。

A. 0　　B. 0.25　　C. 0.5　　D. 1

7. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，μ, σ^2 是未知参数，则下列样本函数为统计量的是（　　）。

A. $\sum_{i=1}^{n} x_i - \mu$　　B. $\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$　　C. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$　　D. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

8. 对总体参数进行区间估计，则下列结论正确的是（　　）。

A. 置信度越大，置信区间越长　　B. 置信度越大，置信区间越短

C. 置信度越小，置信区间越长　　D. 置信度大小与置信区间长度无关

9. 在假设检验中，H_0 为原假设，H_1 为备择假设，则第一类错误是（　　）。

A. H_1 成立，拒绝 H_0　　B. H_0 成立，拒绝 H_0

C. H_1 成立，拒绝 H_1　　D. H_0 成立，拒绝 H_1

10. 设一元线性回归模型：$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i\left(i = 1, 2, \cdots, n\right)$，$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ 且各 ε_i 相互独立.依据样本 $(x_i, y_i)\left(i = 1, 2, \cdots, n\right)$ 得到一元线性回归方程 $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$，由此得 x_i 对应的回归值为 $\hat{y}_i$，y_i 的平均值 $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\,(\overline{y} \neq 0)$，则回归平方和 $S_{回}$ 为（　　）。

A. $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2$　　B. $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$　　C. $\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \overline{y})^2$　　D. $\sum_{i=1}^{n}\hat{y}_i^2$

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. 设甲、乙独立地向同一目标射击，甲、乙击中目标的概率分别为 0.8，0.5，则甲、乙同时击中目标的概率为_________。

12. 设 A，B 为两事件，且 $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}$，$P(A\,|\,B) = \frac{1}{6}$，则 $P(\overline{A}\,|\,\overline{B}) =$ _________。

13. 已知事件 A，B 满足 $P(AB) = P(\overline{A}\,\overline{B})$，若 $P(A) = 0.2$，则 $P(B) =$ _________。

14. 设随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3	4	5
P	$2a$	0.1	0.3	a	0.3

则 $a =$ __________。

15. 设随机变量 $X \sim N(1, 2^2)$，则 $P\{-1 \leqslant X \leqslant 3\} =$ _________。（附：$\Phi(1) = 0.8413$）

16. 设随机变量 X 服从区间 $[2, \theta]$ 上的均匀分布，且概率密度 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 2 \leqslant x \leqslant \theta \\ 0 & 其他 \end{cases}$，则 $\theta =$ _________。

17. 设二维随机变量（X，Y）的分布律为

X \ Y	0	1	2
0	0.1	0.15	0
1	0.25	0.2	0.1
2	0.1	0	0.1

则 $P\{X=Y\}=$__________。

18. 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,0;1,4;0)$，则 X 的概率密度 $f_X(x)=$__________。

19. 设随机变量 $X\sim U(-1,3)$，则 $D(2X-3)=$__________。

20. 设二维随机变量（X，Y）的分布律为

X \ Y	−1	1
−1	0.25	0.25
1	0.25	0.25

则 $E(X^2+Y^2)=$__________。

21. 设 m 为 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，p 为事件 A 的概率，则对任意正数 ε，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=$__________。

22. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体 $P(\lambda)$ 的样本，$\bar{x}$ 是样本均值，则 $D(\bar{x})=$__________。

23. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体 $B(20,p)$ 的样本，则 p 的矩估计 $\hat{p}=$__________。

24. 设总体服从正态分布 $N(\mu,1)$，从中抽取容量为 16 的样本，u_α 是标准正态分布的上侧 α 分位数，则 μ 的置信度为 0.96 的置信区间长度是__________。

25. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 σ^2 未知，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体的样本，$\bar{x}$ 和 s^2 分别是样本均值和样本方差，则检验假设 $H_0:\mu=\mu_0,\ H_1:\mu\neq\mu_0$ 采用的统计量表达式为__________。

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. 一批零件由两台车床同时加工，第一台车床加工的零件数比第二台多一倍。第一台车床出现不合格产品的概率是 0.03，第二台出现不合格产品的概率是 0.06。

（1）求任取一个零件是合格品的概率；

（2）如果取出的零件是不合格品，求它是由第二台车床加工的概率。

27. 已知二维随机变量（X，Y）的分布律为

X \ Y	−1	0	1
0	0.3	0.2	0.1
1	0.1	0.3	0

求：（1）X 和 Y 的分布律；（2）Cov（X，Y）。

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. 某次抽样结果表明，考生的数学成绩（百分制）近似地服从正态分布 $X \sim N(75, \sigma^2)$，已知 85 分以上的考生数占考生总数的 5%，试求考生成绩在 65 分至 85 分之间的概率。

29. 设随机变量 X 服从区间[0，1]上的均匀分布，Y 服从参数为 1 的指数分布，且 X 与 Y 相互独立。求：

（1）X 及 Y 的概率密度；（2）（X，Y）的概率密度；（3）$P\{X > Y\}$。

五、应用题（10 分）

30. 某种产品用自动包装机包装，每袋重量 $X \sim N(500, 2^2)$（单位：g），生产过程中包装机工作是否正常要进行随机检验.某天开工后抽取了 9 袋产品，测得样本均值 $\bar{x} = 502$ g。问：当方差不变时，这天包装机工作是否正常?

（$\alpha = 0.05$）（附：$u_{0.025} = 1.96$）

全国 2013 年 1 月高等教育自学考试 概率论与数理统计（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. 设 A, B 为随机事件，则 $P(A \cup B) =$（　　）。

A. $P(A)+P(\overline{B})-P(AB)$　　B. $P(A)+P(B)-P(\overline{A}\,\overline{B})$

C. $P(A)+P(B)-P(AB)$　　D. $P(A)+P(B)$

2. 设 A, B 为随机事件，满足 $P(A)=0.3, P(B)=0.5$，$P(AB)=0.15$，则（　　）。

A. $P(B|AB)=P(B)$　　B. $P(B|\overline{A})=P(B)$

C. $P(AB|B)=P(AB)$　　D. $P(A|A\overline{B})=P(A)$

3. 以下函数中能成为某随机变量分布函数的是（　　）。

A. $F(x)=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$　　B. $F(x)=\begin{cases} x\mathrm{e}^{-x} & x\geqslant 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{x^2+1} & x\geqslant 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$　　D. $F(x)=\begin{cases} 1-x\mathrm{e}^{-x} & x\geqslant 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$

4. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，X 的分布函数为 $\varPhi(x)$，则 $P(|X|>2)$ 的值为（　　）。

A. $2[1-\varPhi(2)]$　　B. $2\varPhi(2)-1$　　C. $2-\varPhi(2)$　　D. $1-2\varPhi(2)$

5. 设二维随机变量（X，Y）的分布律与边缘分布律为

X \ Y	-1	0	1	$P_{i\cdot}$
0	0.08	0.16	0.56	0.8
1	0.02	c	d	
$P_{\cdot j}$		0.2		

则（　　）。

A. $c=0.04, d=0.16$　　B. $c=0.02, d=0.14$

C. $c=0.08, d=0.14$　　D. $c=0.04, d=0.14$

6. 设随机变量 X 服从参数为 4 的泊松分布，则下列结论中正确的是（　　）。

A. $E(X)=0.5, D(X)=0.5$　　B. $E(X)=0.5, D(X)=0.25$

C. $E(X)=2, D(X)=4$　　D. $E(X)=4, D(X)=4$

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X \sim B(36, \frac{1}{6})$，$Y \sim B(9, \frac{1}{3})$，则 $D(X-Y+1)=$（　　）。

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

8. 设随机变量 X 的 $E(X)=8000, D(X)=1600$，利用切比雪夫不等式估计 $P\{7800<X<8200\}$ 的值为（　　）。

A. 0.04　　B. 0.20　　C. 0.96　　D. 1.00

9. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，$\bar{x}$ 为样本均值，则 $E(\bar{x}^2)=$（　　）。

A. $\mu^2+\sigma^2$　　B. $\mu^2+\frac{\sigma^2}{n}$　　C. μ^2　　D. $\frac{\mu^2}{n}$

10. 置信度 $(1-\alpha)$ 表达了置信区间的（　　）。

A. 准确性　　B. 精确度　　C. 显著性　　D. 可靠度

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. 某射手射击的命中率为 0.6，在 4 次射击中有且仅有 3 次命中的概率是______。

12. 设 A 与 B 是两个相互独立随机事件，$P(A)=0.2$，$P(B)=0.7$，则 $P(A-B)=$ ______。

13. 设 A 与 B 为随机事件，且 $P(A)=0.8$，$P(A-B)=0.5$，则 $P(B|A)=$ ______。

14. 设随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=k/a\ (k=1,2,3)$，则 $a=$ ______。

15. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$，$\lambda$ 为正参数，若 $P\{X<1\}=0.3$，则 $P(X<2)=$ ________。

16. 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	-1	0	1
P	0.3	0.2	0.4	0.1

则 $P(-2<X<1)=$ ________。

17. 设 $f(x,y)$ 为二维随机变量（X,Y）的密度函数，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy=$ ________。

18. 二维随机变量（X,Y）的分布律为

X \ Y	1	2	3
1	0.2	0.1	0.1
2	0.3	0.3	0

则 $P(XY=2)=$________。

19. 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	C
P	$1/4$	$1/2$	$1/4$

已知 $E(X)=1$，则常数 $C=$________。

20. 已知 $E(X)=-1$，$D(X)=3$，则 $E(3X^2-2)=$________。

21. 一个二项分布的随机变量，其数学期望与方差之比为 $4:3$，则该分布的参数 $p=$________。

22. 设总体服从正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为其样本，则参数 σ^2 的矩估计 $\hat{\sigma}^2=$________。

23. 设制造某种单件产品所需工时（单位：小时）服从正态分布，为了估计制造这种产品所需的单件平均工时，现制造 4 件，记录每件所需工时如下：10.5，11，11.2，12.5，若确定置信度为 0.95，则平均工时的置信区间为________。（$t_{0.05}(3)=2.3534$，$t_{0.025}(3)=3.1824$）

24. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自 X 的样本，方差 σ^2 已知，$\bar{x}$ 为样本均值，则对于假设检验问题 $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，应选用的统计量是________。

25. 已知一元线性回归方程为 $\hat{y}=1+\hat{\beta}_1x$，且 $\bar{x}=2$，$\bar{y}=9$，则 $\hat{\beta}_1=$________。

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. 对同一目标进行三次独立设计，第一次、第二次、第三次射击的命中率分别为 0.4，0.5，0.7，求在这三次射击中，恰好有一次击中目标的概率。

27. 设随机变量 X 在 1，2，3，4 四个整数中等可能地取值，另一随机变量 Y 在 $1\sim X$ 中等可能地取值，试求 $X-Y$ 的分布律。

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ Ax^2 & 0\leqslant x<1\\ Ax & 1\leqslant x<2\\ 1 & x\geqslant 2\end{cases}$$，试求：

（1）系数 A；（2）X 的概率密度；（3）$P\left(0 < X \leqslant \frac{3}{2}\right)$

29. 设甲、乙两射手，他们的射击技术分别如下表所示，其中 X 与 Y 分别表示甲、乙两射手射击环数的分布情况

X	8	9	10
P	0.4	0.2	0.4

Y	8	9	10
P	0.1	0.8	0.1

现要从中选拔一名射手去参加比赛，试讨论选派哪位射手参赛比较合理？

五、应用题（10 分）

30. 某镇居民日收入服从正态分布，现随机调查该镇 25 位居民，得知他们的平均收入 $\overline{x} = 66.4$ 元，标准差 $s = 15$ 元，试问：

（1）当 $\alpha = 0.05$ 时，是否可以认为该镇居民日平均收入为 70 元？

（2）当 $\alpha = 0.05$ 时，是否可以认为该镇居民日收入的方差为 16^2？

（附表：$t_{0.025}(24) = 2.064$，$t_{0.05}(24) = 1.7109$，$u_{0.025} = 1.96$，$u_{0.05} = 1.65$，${\chi^2}_{0.025}(24) = 39.4$，${\chi^2}_{0.05}(24) = 36.4$，${\chi^2}_{0.95}(24) = 13.848$，${\chi^2}_{0.975}(24) = 12.4$）

全国 2013 年 4 月高等教育自学考试
概率论与数理统计（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. 甲、乙两人向同一目标射击，A 表示“甲命中目标”，B 表示“乙命中目标”，C 表示“命中目标”，则 $C=$（　　）。

A. A　　B. B　　C. AB　　D. $A\cup B$

2. 设 A, B 为随机事件，$P(\overline{A})=0.7, P(AB)=0.2$，则 $P(A-B)=$（　　）。

A. 0.1　　B. 0.2　　C. 0.3　　D. 0.4

3. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $P(a<x\leqslant b)=$（　　）。

A. $F(b-0)-F(a-0)$　　B. $F(b-0)-F(a)$

C. $F(b)-F(a-0)$　　D. $F(b)-F(a)$

4. 设二维随机变量（X，Y）的分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0	0.1	0.2
1	0.4	0.3	0

则 $P\{X=0\}=$（　　）。

A. 0　　B. 0.1　　C. 0.2　　D. 0.3

5. 设二维随机变量 (X,Y) 概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}0.5 & 0<x<1, 0<y<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，则 $P(X\leqslant 0.5, Y\leqslant 1)=$（　　）。

A. 0.25　　B. 0.5　　C. 0.75　　D. 1

6. 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
P	0.4	0.3	0.3

则 $E(X)=$（　　）。

A. -0.8　　B. -0.2　　C. 0　　D. 0.4

7. 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1 & x>1\end{cases}$，则 $E(X)=$（　　）。

A. $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^1 2x\mathrm{d}x$　　C. $\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^{+\infty} 2x^2\mathrm{d}x$

8. 设总体 X 服从区间 $[\theta,4\theta]$ 上的均匀分布 $(\theta>0)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自 X 的样本，$\overline{x}$ 为样本均值，则 $E(\overline{x})=$（　　）。

A. 5θ　　B. 3θ　　C. $\frac{5}{2}\theta$　　D. $\frac{3}{2}\theta$

9. 设 x_1，x_2，x_3，x_4 为来自总体 X 的样本，且 $E(X)=\mu$. 记 $\widehat{\mu}_1=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$，$\widehat{\mu}_2=\frac{1}{3}(x_2+x_3)$，$\widehat{\mu}_3=\frac{1}{4}(x_3+x_4)$，$\widehat{\mu}_4=\frac{1}{5}(x_1+x_4)$，则 μ 的无偏估计是（　　）。

A. $\widehat{\mu}_1$　　B. $\widehat{\mu}_2$　　C. $\widehat{\mu}_3$　　D. $\widehat{\mu}_4$

10.设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 未知，σ^2 已知，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自 X 的样本，$\overline{x}$ 为样本均值，s^2 为样本方差. 则 μ 的置信度 $1-\alpha$ 的置信区间是（　　）。

A. $\left[\overline{x}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}},\overline{x}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

B. $\left[\overline{x}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

C. $\left[\overline{x}-t_{\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\overline{x}+t_{\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

D. $\left[\overline{x}-t_{\alpha}(n-1)\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+t_{\alpha}(n-1)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. 设 A 与 B 为随机事件，且 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.2$，$P(A\cup B)=0.5$，则 $P(AB)=$__________。

12. 从 0，1，2，3，4 五个数字中不放回地取 3 次数，每次任取一个，则第 3 次取到 0 的概率为__________。

13. 设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(A|B)=0.2$，则 $P(\overline{A})=$__________。

14. 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X\geqslant 1\}=$__________。

15. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{1}{x^2} & x\geqslant 1\end{cases}$，用 Y 表示对 X 的 3 次独立重复观察中事件 $\{X>3\}$ 出现的次数，则 $P(Y=3)=$__________。

16. 设二维随机变量（X,Y）服从圆域 $D:x^2+y^2\leqslant 1$ 上的均匀分布，$f(x,y)$ 为其概率密度，则 $f(0,0)=$__________。

17. 设 C 为常数，则 C 的方差 $D(C)=$__________。

18. 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，则 $E(\mathrm{e}^{-2X})=$__________。

19. 设随机变量 $X\sim B(100,0.5)$，则由切比雪夫不等式估计概率 $P\{40<X<60\}\geqslant$ __________。

20. 设总体 $X\sim N(0,4)$，x_1,x_2,x_3 为来自 X 的样本，若 $c\left({x^2}_1+{x^2}_2+{x^2}_3\right)\sim\chi^2(3)$，则常数 $c=$__________。

21. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 X 的样本，且 $D(X)=\sigma^2$，$\bar{x}$ 为样本均值，则 $E(\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2)$ =__________。

22. 设总体服从参数为 λ 的泊松分布，λ 为未知参数，$\bar{x}$ 为样本均值，则 λ 的矩估计 $\hat{\lambda}$ =__________。

23. 设总体服从参数为 λ 的指数分布，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体的样本，在对 λ 进行极大似然估计时，记 $L(\lambda;x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为似然函数，则当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都大于 0 时，$L(\lambda;x_1,x_2,\cdots,x_n)=$ __________。

24. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自 X 的样本，s^2 为样本方差，检验假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2,H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$，选用检验统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$，当 H_0 成立时，则 $\chi^2\sim$__________。

25. 在一元线性回归模型中 $y=\beta_0+\beta_1x_i+\varepsilon_i$，其中 $\varepsilon_i\sim N\left(0,\sigma^2\right)$，$i=1,2,\cdots,n$，且 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 相互独立，令 $\bar{y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$，则 $D(\bar{y})=$__________。

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. 甲、乙两人从装有 6 个白球 4 个黑球的盒中取球，甲先从中任取一个球，不放回，而后乙再从盒中任取两个球，求：

（1）甲取到黑球的概率；（2）乙取到的都是黑球的概率。

27. 某种零件的直径 $X\sim N(12,\sigma^2)$（单位：mm），σ^2 未知。现用一种新工艺生产此种零件，随机取出 16 个零件，测其直径，算得样本均值 $\bar{x}=11.5$，样本标准差 $s=0.8$，问用新工艺生产的零件平均直径与以往有无显著差异？$(\alpha=0.05)$（附：$t_{0.025}(15)=2.1315$）

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(x+2y)} & x>0,y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，求：

（1）(X,Y) 关于 X,Y 的边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$；

（2）令 $Z=2X+1$，求 Z 的概率密度。

29. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X\sim N(0,3),Y\sim N(1,4)$，令 $Z=2X+Y$，求：

（1）$E(Z),D(Z)$；（2）$E(XZ)$；（3）ρ_{XZ}。

五、应用题（10 分）

30. 某次考试成绩 X 服从正态分布 $X\sim N(75,15^2)$（单位：分）。

求：（1）求此次考试的及格率 $P(X\geqslant 60)$ 和优秀率 $P(X\geqslant 90)$；

（2）考试成绩至少高于多少分能排名前 50%？

（附：$\Phi(1)=0.8413$）

全国 2013 年 10 月高等教育自学考试
概率论与数理统计（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. 设 A, B 为随机事件，则事件“A，B 至少有一个发生”可表示为（　　）。

A. AB　　B. $A\overline{B}$　　C. $\overline{A}\cup B$　　D. $A\cup B$

2. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $P\{X>x\}=$（　　）。

A. $\Phi(x)$　　B. $1-\Phi(x)$　　C. $\Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$　　D. $1-\Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

3. 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma^2{}_1,\sigma_2{}^2,\rho)$，则 $X\sim$（　　）。

A. $N(\mu_1,\sigma_1{}^2)$　　B. $N(\mu_2,\sigma_1{}^2)$　　C. $N(\mu_1,\sigma_2{}^2)$　　D. $N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$

4. 设二维随机变量（X，Y）的分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	a	0.2
1	0.2	b

且 $P\{Y=1\mid X=0\}=0.5$，则（　　）。

A. $a=0.2, b=0.4$　　B. $a=0.4, b=0.2$

C. $a=0.1, b=0.5$　　D. $a=0.5, b=0.1$

5. 设随机变量 $X\sim B(n,p)$，且 $E(X)=2.4$，$D(X)=1.44$，则（　　）。

A. $n=4, p=0.6$　　B. $n=6, p=0.4$

C. $n=8, p=0.3$　　D. $n=24, p=0.1$

6. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，Y 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布，则下列结论中**不正确**的是（　　）。

A. $E(X+Y)=\mu+\dfrac{1}{\lambda}$　　B. $D(X+Y)=\sigma^2+\dfrac{1}{\lambda^2}$

C. $E(X)=\mu, E(Y)=\dfrac{1}{\lambda}$　　D. $D(X)=\sigma^2, D(Y)=\dfrac{1}{\lambda^2}$

7. 设总体 X 服从 $[0,\theta]$ 上的均匀分布（参数 θ 未知），$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自 X 的样本，则下列随机变量中是统计量的为（　　）。

A. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$　　B. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\theta$

C. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-E(X)$　　D. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x^2{}_1-D(X)$

8. 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，其中μ未知，$\overline{x}$为样本均值，则σ^2的无偏估计量为（　　）。

A. $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$　　B. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

C. $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$　　D. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$

9. 设H_0为假设检验的原假设，则显著性水平α等于（　　）。

A. $P\{$接受$H_0|H_0$不成立$\}$　　B. $P\{$拒绝$H_0|H_0$成立$\}$

C. $P\{$拒绝$H_0|H_0$不成立$\}$　　D. $P\{$接受$H_0|H_0$成立$\}$

10. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中σ^2未知，$x_1,x_2,\cdots,x_n$为来自X的样本，$\overline{x}$为样本均值，s为样本标准差。在显著性水平α下检验假设$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$. 令$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$，则拒绝域为（　　）。

A. $|t|<t_{\frac{a}{2}}(n-1)$　　B. $|t|<t_{\frac{a}{2}}(n)$

C. $|t|>t_{\frac{a}{2}}(n-1)$　　D. $|t|>t_{\frac{a}{2}}(n)$

二、填空题（本大题共15小题，每小题2分，共30分）

11. 设随机事件A与B相互独立，且$P(B)>0,P(\overline{A}\mid B)=0.6$，则$P(A)=$______。

12. 甲、乙两个气象台独立地进行天气预报，它们预报准确的概率分别是0.8和0.7，则在一次预报中两个气象台都预报准确的概率是________。

13. 设随机变量X服从参数为1的指数分布，则$P\{X>1\}=$__________。

14. 设随机变量$X\sim N(1,1),Y=X-1$,则Y的概率密度$f_Y(y)=$________。

15. 设二维随机变量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$，则$F(+\infty,+\infty)=$_________。

16. 设随机变量X与Y相互独立，且都服从参数为1的泊松分布，则$P\{X=1,Y=2\}=$_______。

17. 设随机变量X服从区间$[0,2]$上的均匀分布，则$E(X)=$_______。

18. 设随机变量X与Y的协方差$\mathrm{Cov}(X,Y)=-1$，则$\mathrm{Cov}(2Y,-3X)=$________。

19. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$D(X_i)=\sigma^2\ (i=1,2,\cdots,n)$，则 $D(\sum_{i=1}^{n} X_i)$ =________。

20. 设 X 为随机变量，$E(X)=1, D(X)=0.5$，则由切比雪夫不等式可得 $P\{|X-1|\geqslant 1\}\leqslant$ ______。

21. 设总体 $X\sim N(0,1)$，x_1, x_2, x_3 为来自 X 的样本，则 $x^2{}_1+x^2{}_2+x^2{}_3\sim$ ________。

22. 设随机变量 $t\sim t(n)$，且 $P\{t>t_\alpha(n)\}=\alpha$，则 $P\{t\leqslant -t_\alpha(n)\}=$________。

23. 设总体 $X\sim N(\mu,\ 1)$，x_1，x_2 是来自 X 的样本. $\hat{\mu}_1=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2$，$\hat{\mu}_2=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2$ 都是 μ 的估计量，则其中较有效的是_______。

24. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma_0{}^2)$，其中 $\sigma_0{}^2$ 已知，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为来自 X 的样本，$\bar{x}$ 为样本均值，则对假设 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$ 应采用的检验统计量的表达式为_______。

25. 依据样本 $(x_i, y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 得到一元线性回归方程 $\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x$, $\bar{x}, \bar{y}$ 为样本均值，令 $L_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$，$L_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\ (y_i-\bar{y})$，则回归常数 $\hat{\beta}_0=$________。

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{6} & 0<x<3,\ 0<y<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，求：

（1）(X,Y) 关于 X,Y 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；

（2）$P\{X+Y\leqslant 2\}$。

27. 假设某校数学测验成绩服从正态分布，从中抽出 20 名学生的分数，算得样本标准差 $s=4$ 分，求正态分布方差 σ^2 的置信度为 98%的置信区间。($\chi^2{}_{0.01}(19)=36.191$，$\chi^2{}_{0.99}(19)=7.633$)

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. 设某人群中患某种疾病的比例为 20%. 对该人群进行一种测试，若患病则测试结果一定为阳性；而未患病者中也有 5%的测试结果呈阳性。求：

（1）测试结果呈阳性的概率；

（2）在测试结果呈阳性时，真正患病的概率。

29. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}cx & 0<x<4\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，求：

（1）常数 c；（2）X 的分布函数 $F(x)$；（3）$P\{|X|\leqslant 2\}$。

五、应用题（10 分）

30. 某保险公司有种保险，每个保单收取保险费 600 元，理赔额 10000 元，在有效期内只理赔一次。设保险公司共卖出这种保单 800 个，每个保单理赔概率为 0.04。求：

（1）理赔保单数的分布律；

（2）保险公司在该种保险上获得的期望利润。

全国 2014 年 4 月高等教育自学考试
概率论与数理统计（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. 掷一颗骰子，观察出现的点数. A 表示“出现 3 点”，B 表示“出现偶数点”，则（　　）。

A. $A\subset B$　　B. $A\subset \overline{B}$　　C. $\overline{A}\subset B$　　D. $\overline{A}\subset \overline{B}$

2. 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	2
P	0.1	0.3	0.6

$F(x)$ 为 X 的分布函数，则 $F(0)=$（　　）。

A. 0.1　　B. 0.3　　C. 0.4　　D. 0.6

3. 设二维随机变量（X，Y）的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} c & -1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，则常数 $c=$（　　）。

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 2　　D. 4

4. 设随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，则 $D(9-2X)=$（　　）。

A. 1　　B. 4　　C. 5　　D. 8

5. 设（X，Y）为二维随机变量，则与 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ 不等价的是（　　）。

A. X 与 Y 相互独立　　B. $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$

C. $E(XY)=E(X)E(Y)$　　D. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

6. 设 X 为随机变量，$E(X)=0.1$，$D(X)=0.01$，则由切比雪夫不等式可得（　　）。

A. $P\{|X-0.1|\geqslant 1\}\leqslant 0.01$　　B. $P\{|X-0.1|\geqslant 1\}\geqslant 0.99$

C. $P\{|X-0.1|<1\}\leqslant 0.99$　　D. $P\{|X-0.1|<1\}\leqslant 0.01$

7. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自某总体的样本，$\overline{x}$ 为样本均值，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})=$（　　）。

A. $(n-1)\overline{x}$　　B. 0　　C. $\overline{x}$　　D. $n\overline{x}$

8. 设总体 X 的方差为 σ^2，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为来自该总体的样本，$\bar{x}$ 为样本均值，则参数 σ^2 的无偏估计为（　　）。

A. $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$　　B. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$　　C. $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$　　D. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

9. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,1)$ 的样本，$\bar{x}$ 为样本均值，s^2 为样本方差. 检验假设 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$，采用的检验统计量应为（　　）。

A. $\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$　　B. $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$　　C. $\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)$　　D. $\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)$

10. 设一元线性回归模型为 $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$，$\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$，$i = 1,2,\cdots,n$，则 $E(y_i) =$（　　）。

A. β_0　　B. $\beta_1 x_i$　　C. $\beta_0 + \beta_1 x_i$　　D. $\beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. 设 A，B 为随机事件，$P(A) = \frac{1}{2}, P(B|A) = \frac{1}{3}$，则 $P(AB) =$_______。

12. 随机事件 A 与 B 相互独立，$P(A) = 0.3, P(B) = 0.4$，则 $P(A-B) =$_______。

13. 设 A，B 为对立事件，则 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) =$_______。

14. 设随机变量 X 服从区间 $[1,5]$ 上的均匀分布，$F(x)$ 为 X 的分布函数，当 $1 \leqslant x \leqslant 5$ 时，$F(x) =$_______。

15. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，则 $P\left\{X > \frac{1}{2}\right\} =$_______。

16. 已知随机变量 $X \sim N(4,9)$，$P\{X > c\} = P\{X, c\}$，则常数 $c =$_______。

17. 设二维随机变量（X，Y）的分布律为

X \ Y	1	2	3
1	0.3	0.1	0.1
2	0.1	a	0.1

则常数 $a =$_______。

18. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim N(-1,1)$，若 $Z = X - Y$，则 $Z \sim$_______。

19. 设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，则 $E(X^2) =$_______。

20. 设 X，Y 为随机变量，且 $E(X) = E(Y) = 1$，$D(X) = D(Y) = 5$，$\rho_{XY} = 0.8$，则 $E(XY) =$_______。

21. 设随机变量 $X \sim B(100, 0.2)$， $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，$\Phi(2.5)=0.9938$，应用中心极限定理，可得 $P\{20 \leqslant X \leqslant 30\} \approx$ ________。

22. 设总体 $X \sim N(0,1)$， x_1, x_2, x_3, x_4 为来自总体 X 的样本，则统计量 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ ~________。

23. 设样本的频数分布为

X	0	1	2	3
频数	2	4	2	2

则样本均值 $\bar{x}$=________。

24. 设总体 $X \sim N(\mu, 16)$，μ 未知，$x_1, x_2, \cdots, x_{16}$ 为来自该总体的样本，$\bar{x}$ 为样本均值，u_α 为标准正态分布的上侧 α 分位数。当 μ 的置信区间是 $\left[\bar{x}-u_{0.05}, \bar{x}+u_{0.05}\right]$ 时，则置信度为________。

25. 某假设检验的拒绝域为 W，当原假设 H_0 成立时，样本值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 落入 W 的概率为 0.1，则犯第一类错误的概率为________。

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y)=\begin{cases}6x^2 y & 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求：（1）(X, Y) 关于 X 的边缘概率密度 $f_X(x)$；

（2） $P\{X>Y\}$。

27. 设二维随机变量（X，Y）的分布律为

X \ Y	0	1	2
0	0.1	0.1	0.2
1	0.2	0.1	0.3

求：（1） $E(Y), D(X)$；（2） $E(X+Y)$。

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. 有甲、乙两盒，甲盒装有 4 个白球、1 个黑球，乙盒装有 3 个白球、2 个黑球。从甲盒中任取 1 个球，放入乙盒中，再从乙盒中任取 2 个球。

（1）求从乙盒中取出的是 2 个黑球的概率；

（2）已知从乙盒中取出的是 2 个黑球，问从甲盒中取出的是白球的概率。

29. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$， $Y = 2X$ 。求：

（1） $P\{X < -1\}$；（2） $P\{|X| < 1\}$；（3）Y 的概率密度。（附： $\Phi(1) = 0.8413$ ）

五、应用题（10 分）

30. 某项经济指标 $X \sim N(\mu, 2)$，将随机调查的 11 个地区的该项指标 $x_1, x_2, \cdots, x_{11}$ 作为样本，算得样本方差 $s^2 = 3$ 。问可否认为该项指标的方差仍为 2?（显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

（附： $\chi^2_{0.025}(10) = 20.5,\ \chi^2_{0.975}(10) = 3.2$ ）

全国 2014 年 10 月高等教育自学考试
概率论与数理统计（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. 设随机事件 A 与 B 相互独立，$P(A)=0.2$，$P(B)=0.4$，则 $P(A|B)=$（　　）。

A. 0　　B. 0.2　　C. 0.4　　D. 1

2. 设随机变量 $X\sim N\left(3,2^2\right)$，且 $P(X>c)=P(X\leqslant c)$，则常数 $c=$（　　）。

A. 0　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 下列函数中可以作为某随机变量概率密度的是（　　）。

A. $f(x)=\begin{cases}3x^2 & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$　　B. $f(x)=\begin{cases}3x^2 & 1<x\leqslant 2\\ 0 & 其他\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases}3x^2 & 2<x<3\\ 0 & 其他\end{cases}$　　D. $f(x)=\begin{cases}3x^2 & -1<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

4. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $D(X)=4, D(Y)=3$，则 $D(3X-2Y)=$（　　）。

A. 6　　B. 18　　C. 24　　D. 48

5. 设 X，Y 为随机变量，若 $E(XY)=E(X)E(Y)$，则下列结论中一定成立的是（　　）。

A. $D(XY)=D(X)D(Y)$　　B. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

C. X 与 Y 相互独立　　D. X 与 Y 不相互独立

6. 设随机变量 X 的方差等于 1，由切比雪夫不等式可估计 $P\left\{\left|X-E(X)\right|\geqslant 2\right\}\leqslant$（　　）。

A. 0　　B. 0.25　　C. 0.5　　D. 0.75

7. 设总体 X 的概率密度为 $f(x)$，x_1，$x_2,\cdots$，x_n 为来自某总体的样本，则样本的联合概率密度函数为（　　）。

A. $f(x)$　　B. $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$

C. $f^n(x)$　　D. $f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$

8. 设总体 X 的期望 $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}(\lambda>0)$，$x_1$，$x_2,\ldots$，$x_n$ 为来自该总体的样本，$\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 为样本均值，则 λ 的矩估计为（　　）。

A. $\overline{x}$　　B. $\dfrac{1}{\overline{x}}$　　C. $\dfrac{\overline{x}}{\lambda}$　　D. $\dfrac{\lambda}{\overline{x}}$

9. 若假设检验 $H_0: \mu=\mu_0, H_1: \mu\neq\mu_0$ 的显著性水平为 $\alpha(0<\alpha<1)$ ，则 $\alpha=$（　　）。

A. $P\left(接受H_1 \middle| H_0为真\right)$　　B. $P\left(接受H_0 \middle| H_0为真\right)$

C. $P\left(接受H_1 \middle| H_1为真\right)$　　D. $P\left(接受H_0 \middle| H_1为真\right)$

10. 在一元线性回归方程 $\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x$ 中，回归系数 $\hat{\beta}_1=$（　　）。

A. $\dfrac{L_{xy}}{L_{yy}}$　　B. $\dfrac{L_{yy}}{L_{xy}}$　　C. $\dfrac{L_{xy}}{L_{xx}}$　　D. $\dfrac{L_{xx}}{L_{xy}}$

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. 设 A、B 为互不相容的随机事件， $P(A)=0.2, P(A\cup B)=0.8,$ 则 $P(B)=$_______。

12. 设 A 与 B 为随机事件， $P(A)=0.6$， $P(AB)=0.4,$ 则 $P(A\overline{B})=$_______。

13. 某工厂产品的次品率为 1%，在正品中有 80%为一等品，如果从该厂产品中任取一件进行检验，则检验结果是一等品的概率为_______。

14. 设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $\Phi(2)+\Phi(-2)=$______。

15. 设 $F_1(x), F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1, X_2 的分布函数，且 $F(x)=aF_1(x)-F_2(x)$ 也是某随机变量的分布函数，则常数 $a=$_______。

16. 设随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3
P	0.2	0.2	0.6

$F(x)$ 是 X 的分布函数，则 $F(2)=$_______。

17. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & x\leqslant 0 \end{cases}$，$Y$ 的概率密度 $f_Y(y)=\begin{cases} 3e^{-3y} & y>0 \\ 0 & y\leqslant 0 \end{cases}$，则当 $x>0, y>0$ 时，二维随机变量 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)=$_______。

18. 设随机变量 $X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(0,1)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $2X+3Y\sim$ _______。

19. 设随机变量 X 服从区间[1,5]上的均匀分布，则 $\dfrac{E(X)}{D(X)}=$ _______。

20. 设随机变量 X 服从参数为 3 的泊松分布，随机变量 $Y\sim N(1,4)$，则 $E(X^2+Y^2)=$_______，

21. 设随机变量 $X \sim B(100, 0.9)$，则 $P\{X>85\} \approx$ ________。$\left(\Phi\left(\frac{5}{3}\right)=0.9525\right)$

22. 设总体 $X \sim N(0,1)$，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为来自总体 X 的样本，则统计量 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sim$ ________。

23. 设总体 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1} & 0<x<1 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为来自总体 X 的样本，$\bar{x}$ 为样本均值（$\bar{x} \neq 1$），则 θ 的矩估计 $\hat{\theta}$= ________。

24. 设总体 $X \sim N(\mu, 1)$，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为来自该总体的样本，$\bar{x}$ 为样本均值，则 μ 的 $1-\alpha$ 的置信区间是________。

25. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$（σ 未知），$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为来自该总体的样本，$\bar{x}, s^2$ 为样本均值和样本方差，则对于假设检验 $H_0: \mu=\mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$，应采用检验统计量的表达式为________。

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. 某车间有 3 台独立工作的同型号机器，假设在任一时刻，每台机器不出现故障的概率为 0.9，求在同一时刻至少有一台机器出现故障的概率。

27. 设二维随机变量（X，Y）的分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2	3
1	0	3/8	3/8	0
3	1/8	0	0	1/8

求：(1) $E(X)$，$E(Y)$，$E(XY)$；

（2）问 X 与 Y 是否相互独立？并说明理由。

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}ax & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，求：

（1）常数 a；（2）分布函数 $F(x)$；（3）$P\{|x| \leqslant \frac{1}{2}\}$。

29. 设二维随机变量（X，Y）的概率密度为 $f(x, y)=\begin{cases}6\mathrm{e}^{-(2x+3y)} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

（1）求关于 X，Y 的边缘概率密度；

（2）问 X，Y 是否相互独立？为什么？

（3）计算 $P\{X<1, Y<2\}$。

五、应用题（10 分）

30. 设某地区居民每户的周消费额 X（元）服从正态分布 $X \sim N(\mu, 25)$，现随机抽查 100 户居民，计算其平均周消费额为 $\overline{x} = 340.5$ 元。问在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，可否认为该地区居民平均周消费额是 340 元？（附：$u_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$）

全国 2015 年 4 月高等教育自学考试 概率论与数理统计（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. 设 A,B 为随机事件，且 $P(AB)>0$，则 $P(B|AB)=$（　　）。

A. 1　　B. $P(A)$　　C. $P(B)$　　D. $P(AB)$

2. 设随机变量 $X\sim B(3,0.2)$，则 $P\{X>2\}=$（　　）。

A. 0.008　　B.0.488　　C.0.512　　D.0.992

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+1)^2}{18}}$，则 $X\sim$（　　）。

A. $N(-1,3)$　　B. $N(-1,9)$　　C. $N(1,3)$　　D. $N(1,9)$

4. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，则下列结论中不一定成立的是（　　）。

A. $F(-\infty)=0$　　B. $F(+\infty)=1$　　C. $0\leqslant F(x)\leqslant 1$　　D. $F(x)$ 是连续函数

5. 随机变量 (X,Y) 的分布律如下：

X \ Y	0	1	2
1	0.1	0.2	0.25
2	0	0.15	0.3

则 $P(X=Y)=$（　　）。

A. 0.2　　B. 0.25　　C. 0.3　　D. 0.5

6. 设随机变量 X 服从参数为 $\dfrac{1}{2}$ 的指数分布，则 $E(2X-1)=$（　　）。

A. 0　　B. 1　　C. 3　　D. 4

7. 设随机变量 X 与 Y 的相关系数为 0.5, $D(X)=9$, $D(Y)=4$，则 $D(3X-Y)=$（　　）。

A. 5　　B. 23　　C. 67　　D. 85

8. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自 X 的样本，则 $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\cdots+x_n^{\ 2}\sim$（　　）。

A. $N\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$　　B. $N(0,1)$　　C. $\chi^2(n)$　　D. $t(n)$

9. 设 x_1,x_2,x_3,x_4 为来自总体 X 的样本，且 $E(X)=\mu$，记 $\widehat{\mu}_1=\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3)$，$\widehat{\mu}_2=\frac{1}{3}(x_1+x_3+x_4)$，$\widehat{\mu}_3=\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_4)$，$\widehat{\mu}_4=\frac{1}{5}(x_2+x_3+x_4)$，则 μ 的无偏估计是（　　）。

A. $\widehat{\mu}_1$　　B. $\widehat{\mu}_2$　　C. $\widehat{\mu}_3$　　D. $\widehat{\mu}_4$

10. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma_0^{\ 2})$，$\sigma_0^{\ 2}$ 已知，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自 X 的样本，$\overline{x}$ 为样本均值。假设 $H_0:\mu=\mu_0$，μ_0 已知，检验统计量 $u=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$，给定检验水平 α，拒绝 H_0 的理由是（　　）。

A. $|u|<u_{\frac{\alpha}{2}}$　　B. $|u|>u_{\frac{\alpha}{2}}$　　C. $|u|<u_\alpha$　　D. $|u|>u_\alpha$

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. 设事件 A，B 相互独立，$P(A)=0.3,P(B)=0.5$，则 $P(AB)=$_______。

12. 设 A，B 为随机事件 $P(A)=0.6,P(B)=0.3,P(B|A)=0.2$，则 $P(A\cup B)=$_______。

13. 设某射手命中率为 0.7，他向目标独立射击 3 次，则至少命中一次的概率为_______。

14. 设随机变量 X 的分布率为

X	0	1	2
P	0.1	c	0.3

则常数 $c=$_______。

15. 设随机变量 X 服从区间 $[a,b]$ 上的均匀分布，则当 $a<x<b$ 时，X 的分布函数 $F(x)=$_______。

16. 设随机变量 X,Y 相互独立，且 $P\{X\leqslant 2\}=\frac{1}{3}$，$P\{Y\leqslant 1\}=\frac{2}{5}$，则 $P\{X\leqslant 2,Y\leqslant 1\}=$_______。

17. 设随机变量 X,Y 相互独立，X 服从区间 $[-2,2]$ 上的均匀分布，Y 服从参数为 1 的指数分布，则当 $-2<x<2,y>0$ 时，(X,Y) 的概率密度 $f(x,y)=$_______。

18. 设二维随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$E(X)=5$，则 $\lambda=$_______。

19. 设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(2,4)$, $Y\sim U(-1,3)$，则 $E(XY)=$_______。

20. 设随机变量 X 的方差 $D(X)$，则对任意小的正数 ε，有 $P\{|X-E(X)<\varepsilon|\}\geqslant$_______。

21. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自正态总体 $N(1,4)$ 的样本，则 $\frac{\overline{x}-1}{2/\sqrt{n}}\sim$_______。

22. 设总体 $X\sim U(0,2\theta),\theta>0$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 X 的样本，$\overline{x}$ 为样本均值，则未知参数 θ 的矩估计 $\hat{\theta}=$_______。

23. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$，$\mu_0$ 已知，给定检验水平 α，拒绝 H_0

的可信度为________。

24. 设某产品的一项指标 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$，$\sigma^2$ 未知，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是对 X 的 $n(n>1)$ 次独立观测值，令 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$，则假设 $H_0: \mu=1$，$H_1: \mu \neq 1$ 的检验统计量表达式为________。

25. 设一元线性回归数学模型为 $y_i=\beta_0+\beta_1 x_i+\varepsilon_i$，$\varepsilon_i \sim N(0,\ \sigma^2)$，$i=1，2，\cdots n$，且各 ε_i 相互独立，令 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ 分别为 β_0, β_1 的最小二乘估计，则一元线性回归方程是 $y=$________。

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. 盒中有 4 个白球，2 个红球。从中连续不放回地取两次，每次取 1 个球。求第二次取到红球的概率。

27. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2x} & x>0 \\ 0 & x \leqslant 0\end{cases}$，其概率密度为 $f(x)$。求：

（1）$f(3)$；（2）$P\{X>3\}$。

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. 设随机变量 X 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，随机变量 Y 的概率密度为 $f_Y=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y} & y>0 \\ 0 & y \leqslant 0\end{cases}$，且 X 与 Y 相互独立。求：

（1）$f_X(x)$；（2）(X, Y) 的概率密度 $f(x, y)$；（3）$P\{X+Y \leqslant 1\}$。

29. 设二维随机变量 (X, Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	-1	1
-1	$1/4$	$1/4$
2	$1/4$	$1/4$

求：（1）$E(X), E(Y)$；（2）$D(X), D(Y)$；（3）$\operatorname{Cov}(X, Y), \rho_{XY}$。

五、应用题（本大题共 1 小题，10 分）

30. 设一台车床加工零件，零件长度 X（单位：厘米）服从正态分布 $N\left(\mu, 0.16\right)$，现从加工的零件中随机抽取 16 个进行测量，并算得平均值 $\bar{x}=40$，求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间。

（附：$u_{0.025}=1.96$）

全国 2015 年 10 月高等教育自学考试
概率论与数理统计（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. 设随机事件 A 与 B 互不相容，且 $P(A)=0.4, P(B)=0.2$，则 $P(A\cup B)=$（　　）。

A. 0　　B. 0.2　　C. 0.4　　D. 0.6

2. 设随机变量 $X\sim B(3,0.3)$，则 $P\{X=2\}=$（　　）。

A. 0.189　　B. 0.21　　C. 0.441　　D. 0.7

3. 设随机变量 X 概率密度为 $f(x)=\begin{cases} ax^2 & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，则常数 $a=$（　　）。

A. 0　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 3

4. 设机变量 X 的分布率为

X	-1	0	1
P	0.2	0.6	0.2

则 $P\{X^2=1\}=$（　　）。

A. 0.2　　B. 0.4　　C. 0.6　　D. 0.8

5. 设二维随机变量（X，Y）为的分布率为

X \ Y	0	1	2
0	0.1	0.2	0.3
1	0.1	0.2	0.1

则 $P\{X=1\}=$（　　）。

A. 0.1　　B. 0.2　　C. 0.3　　D. 0.4

6. 设随机变量 $X\sim N(3,2^2)$，则 $E(2X+3)=$（　　）。

A. 3　　B. 6　　C. 9　　D. 15

7. 设随机变量 X 服从参数为 3 的泊松分布，Y 服从参数为 $\dfrac{1}{5}$ 的指数分布，且 X，Y 相互独立，则 $D(X-2Y+1)=$（　　）。

A. 23　　B. 28　　C. 103　　D. 104

8. 已知 X 与 Y 的协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)=-\dfrac{1}{2}$，则 $\mathrm{Cov}(-2X,Y)=$（　　）。

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. 0　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

9. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n(n>2)$ 为总体 X 的一个样本，且 $E(X)=\mu$（μ未知），$\bar{x}$ 为样本均值，则 μ 的无偏估计为（　　）。

A. $n\bar{x}$　　B. $\bar{x}$　　C. $(n-1)\bar{x}$　　D. $\dfrac{1}{(n-1)}\bar{x}$

10. 设 α 是假设检验中犯第一类错误的概率，H_0 为原假设，以下概率为 α 的是（　　）。

A. $P\left(\text{接受}H_0\middle|H_0\text{不真}\right)$　　B. $P\left(\text{拒绝}H_0\middle|H_0\text{真}\right)$

C. $P\left(\text{拒绝}H_0\middle|H_0\text{不真}\right)$　　D. $P\left(\text{接受}H_0\middle|H_0\text{真}\right)$

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. 袋中有编号为 0，1，2，3，4 的 5 个球。今从袋中任取一球，取后放回；再从袋中任取一球，则取到两个 0 号球的概率为 ________。

12. 设 A 与 B 为随机事件，则事件“A，B 至少有一个发生”可由 A，B 表示为 ________。

13. 设 A 与 B 相互独立，且 $P(A)=0.3,P(B)=0.4$，则 $P(\overline{A\cup B})=$ ________。

14. 设 X 表示某射手在一次射击中命中目标的次数，该射手的命中率为 0.9，则 $P\{X=0\}=$ ________。

15. 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，则 $P\{X>2\}=$ ________。

16. 设二维随机变量（X，Y）的分布律为

$X \backslash Y$	0	1
1	9/25	6/25
2	6/25	c

则 $c=$________。

17. 设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$，则 $P\{X\leqslant 0,Y\leqslant 0\}$ 用 $F(x,y)$ 表示为 ________。

18. 设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 $D:-1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2$ 上的均匀分布，则 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$ 在 D 上的表达式为________。

19. 设 X 在区间 $[1,4]$ 上服从均匀分布，则 $E(X)=$ ________。

20. 设 $X\sim B\left(5,\dfrac{1}{5}\right)$，则 $D(X)=$________。

21. 设随机变量 X 与 Y 的协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)=-\frac{1}{2}$，$E(X)=E(Y)=1$，则 $E(XY)=$ ________。

22. 设二维随机变量(X,Y)服从区域 $D:0\leqslant x\leqslant 4,0\leqslant y\leqslant 4$ 上的均匀分布，则 $E(X^2+Y^2)=$ ________。

23. 在贝努利试验中，若事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$,现独立重复观察 n 次，记 $X_i=\begin{cases}1 & \text{第}i\text{次试验}A\text{发生}\\ 0 & \text{第}i\text{次试验}A\text{不发生}\end{cases}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant 2\right\}=$ ________。

24. 设 $X\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(10)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $\dfrac{X}{\sqrt{Y/10}}\sim$ ________。

25. 设总体 X 的样本为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，$D(X)=\sigma^2$，则 $D(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)=$ ________。

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. 已知甲袋中有 3 个白球、2 个红球；乙袋中有 1 个白球、2 个红球。现从甲袋中任取一球放入乙袋，再从乙袋中任取一个球，求该球是白球的概率。

27. 设总体 X 服从区间 $[1,\theta]$ 上的均匀分布，其中 θ 未知，且 $\theta>1$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 X 的一个样本，$\bar{x}$ 为样本均值。

（1）求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}$；

（2）讨论 $\hat{\theta}$ 的无偏性。

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. 箱中装有 10 件产品，其中 8 件正品，2 件次品，从中任取 2 件，X 表示取到的次品数。求：

（1）X 的分布律；

（2）X 的分布函数 $F(x)$；

（3）$P\{0<X\leqslant 2\}$。

29. 设随机变量 $X\sim N(-2,4)$，Y 服从区间 $[-2,0]$ 上的均匀分布。

（1）当 X 与 Y 相互独立时，求 $E[(XY)^2]$；

（2）X 与 Y 的相关系数 $\rho=\frac{1}{2}$ 时，求 $\mathrm{Cov}(2X,Y)$。

五、应用题（10 分）

30. 在某次考试中，随机抽取 16 位考生的成绩，算得平均成绩为 $\bar{x}=68.95$ 分。若这次考试成绩 $X\sim N(\mu,16)$，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，可否认为全体考生的平均成绩为 70 分？

（附：$u_{0.025}=1.96$）

全国 2016 年 4 月高等教育自学考试
概率论与数理统计（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. 设 A，B 为随机事件，$A\subset B$，则 $\overline{A\cup B}=$（　　）。

A. $\overline{A}$　　B. $\overline{B}$　　C. $A\overline{B}$　　D. $\overline{A}B$

2. 设随机变量 A，B 相互独立，且 $P(A)=0.2$，$P(B)=0.6$，则 $P(\overline{A}\,\overline{B})=$（　　）。

A. 0.1　　B. 0.3　　C. 0.4　　D. 0.6

3. 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.3	0.4

$F(x)$ 为 X 的分布函数，则 $F(0.5)=$（　　）。

A. 0　　B. 0.2　　C. 0.25　　D. 0.3

4. 设二维随机变量（X，Y）的分布函数为 $F(x,y)$，则（X，Y）关于 X 的边缘分布函数 $F_X(x)=$（　　）。

A. $F(x,+\infty)$　　B. $F(+\infty,y)$　　C. $F(x,-\infty)$　　D. $F(-\infty,y)$

5. 设二维随机变量（X，Y）的分布律为

X \ Y	0	1	2
1	0.1	0.2	0.3
2	0.2	0.1	0.1

则 $P(X+Y=3)=$（　　）。

A. 0.1　　B. 0.2　　C. 0.3　　D. 0.4

6. 设 X，Y 为随机变量，$E(X)=E(Y)=1$，$\mathrm{Cov}(X,Y)=2$，则 $E(2XY)=$（　　）。

A. -6　　B. -2　　C. 2　　D. 6

7. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(5)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $\dfrac{X}{\sqrt{Y/5}}\sim$（　　）。

A. $t(5)$　　B. $t(4)$　　C. $F(1,5)$　　D. $F(5,1)$

8. 设总体 $X\sim B(1,\ p)$，x_1，$x_2,\ldots$，x_n 为来自该总体的样本，$\overline{x}$ 为样本均值，则未知参

数 p 的无偏估计 $\hat{p}$ 为（　　）。

A. $\frac{\overline{x}}{n}$　　B. $\frac{\overline{x}}{n-1}$　　C. $\overline{x}$　　D. $n\overline{x}$

9. 在假设检验过程中，增大样本容量，则犯两类错误的概率（　　）。

A. 都增大　　B.都减小　　C. 都不变　　D. 一个增大，一个减小

10. 依据样本 $(x_i, y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 得到一元线性回归方程 $\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x$，$\overline{x}$，$\overline{y}$ 为样本均值，令 $L_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$，$L_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$，$L_{yy}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$，则回归系数 $\hat{\beta}_1=$（　　）。

A. $\frac{L_{xy}}{L_{xx}}$　　B. $\frac{L_{xx}}{L_{xy}}$　　C. $\frac{L_{xy}}{L_{yy}}$　　D. $\frac{L_{yy}}{L_{xy}}$

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. 已知随机事件 A，B 互不相容，$P(B)>0$，则 $P(\overline{A}|B)=$_______。

12. 设随机事件 A_1, A_2, A_3 是样本空间的一个划分，且 $P(A_2)=0.5, P(A_3)=0.3$，则 $P(A_1)=$_______。

13. 设 A，B 为随机事件，$P(A)=0.8, P(A\overline{B})=0.6$，则 $P(B|A)=$_______。

14. 设随机变量 $X\sim B(3,0.4)$，令 $Y=X^2$，则 $P(Y=9)=$_______。

15. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\leqslant x<1\\ 1 & x\geqslant 1\end{cases}$，$X$ 的概率密度记为 $f(x)$，则当 $0<x<1$ 时，$f(x)=$_______。

16. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}a & 0\leqslant x\leqslant 4\\ 0 & 其他\end{cases}$，其中常数 a 未知，则 $P(-1<X<1)=$_______。

17. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，已知标准正态分布函数值 $\Phi(1)=0.8413$，则 $P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)=$_______。

18. 设二维随机变量（X，Y）的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}c & 0<x<1, 0<y<2\\ 0 & 其他\end{cases}$，则常数 $c=$_______。

19. 设随机变量 X 服从参数为 3 的泊松分布，则 $D(-2X)=$_______。

20. 设随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3
P	0.1	0.2	0.7

则 $E\left(X^2\right)=$_______。

21. 设随机变量 X，Y 相互独立，且分别服从参数为 2，3 的指数分布，则 $D(X-Y)=$_______。

22. 设 X_1，$X_2,\cdots$，$X_n,\cdots$ 独立同分布，且 $E\left(X_i\right)=\mu$，$D\left(X_i\right)=\sigma^2$，$i=1,2,\cdots$，则对任意 $\varepsilon>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=$_______。

23. 设总体 $X\sim N\left(\mu,4^2\right)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 X 的样本，则统计量 $E\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2\right)=$_______。

24. 设 θ 为总体的未知参数，$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 是由样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 确定的两个统计量，满足 $P\left(\hat{\theta}_1\leqslant\theta\leqslant\hat{\theta}_2\right)=0.95$，则 θ 的置信度为 0.95 的置信区间是_______。

25. 设总体 X 的概率密度为 $f\left(x,\theta\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta} & 0\leqslant x\leqslant\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，其中 θ 为未知参数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自 X 的样本，则 θ 的矩估计 $\hat{\theta}=$_______。

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. 设商店有某商品 10 件，其中一等品 8 件，二等品 2 件，售出 2 件后，从剩下的 8 件中任取一件，求取得一等品的概率。

27. 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，$Y=3X+1$，求 Y 的概率密度 $f_Y\left(y\right)$。

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. 设二维随机变量（X，Y）的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2x\mathrm{e}^{-(y-5)} & 0\leqslant x\leqslant 1,\ y>5\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，求：

（1）（X，Y）关于 X，Y 的边缘概率密度 $f_X\left(x\right),f_Y\left(y\right)$；

（2）X 与 Y 是否独立？为什么？

（3）$E\left(X\right)$。

29. 设二维随机变量（X，Y）的分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	a	0.1	0.2
1	0.1	b	0.2

且 $P(Y=0)=0.4$.求：（1）常数 a， b；（2） $E(X),D(X)$；（3） $E(XY)$。

五、应用题（10 分）

30. 某水泥厂用自动包装机包装水泥，每袋水泥重量服从正态分布。当包装机正常工作时，每袋水泥的平均重量为 50 kg。某日开工后随机抽取 9 袋，测得样本均值 $\overline{x}=49.9$ kg，样本标准差 $s=0.3$ kg。问当日水泥包装机工作是否正常？（显著性水平 $\alpha=0.05$）（$t_{0.025}(8)=2.306$）

全国2016年10月高等教育自学考试概率论与数理统计（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

1. 设A与B是两个随机事件，则$P(A-B)$=（　　）。

A. $P(A)$　　B. $P(B)$　　C. $P(A)-P(B)$　　D. $P(A)-P(AB)$

2. 设随机变量X的分布律为

X	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.3	0.4

则$P(-1<X\leqslant 1)=$（　　）。

A. 0.1　　B. 0.2　　C. 0.3　　D. 0.5

3. 设二维随机变量（X，Y）的分布律为

X \ Y	0	1
1	0.2	0.2
2	a	b

且X与Y相互独立，则下列结论正确的是（　　）。

A. $a=0.2$，$B=0.2$　　B. $a=0.3$，$B=0.3$

C. $a=0.4$，$B=0.2$　　D. $a=0.2$，$B=0.4$

4. 设二维随机变量（X，Y）的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{16} & 0<x<4,\ 0<y<4 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，则$P(0<X<2,\ 0<Y<2)=$（　　）。

A. $\frac{1}{16}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{9}{16}$　　D. 1

5. 设随机变量X服从参数为$\frac{1}{2}$的指数分布，则$D(X)=$（　　）。

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. 4

6. 设随机变量 X 服从二项分布 $B(10,\ 0.6)$，Y 服从均匀分布 $U(0,\ 2)$，则 $E(X-2Y)=$（　　）。

A. 4　　B. 5　　C. 8　　D. 10

7. 设（X，Y）为二维随机变量，且 $D(X)>0$，$D(Y)>0$，ρ_{XY} 为 X 与 Y 的相关系数，则 $\mathrm{Cov}(X,\ Y)=$（　　）。

A. $\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}$　　B. $\rho_{XY}\cdot D(X)\cdot D(Y)$

C. $E(X)E(Y)$　　D. $D(X)\cdot D(Y)$

8. 设总体 $X\sim N(0,\ 1)$，x_1，x_2，…，x_5 为来自 X 的样本，则 $\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2\sim$（　　）。

A. $N(0,5)$　　B. $\chi^2(5)$　　C. $t(5)$　　D. $F(1,5)$

9. 设总体 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，x_1，x_2，…，x_n 为来自 X 的样本，$\bar{x}$ 为样本均值，s 为样本标准差，则 μ 的无偏估计量为（　　）。

A. s　　B. s^2　　C. $\bar{x}$　　D. $\bar{x}^2$

10. 要检验变量 y 和 x 之间的线性关系 $y=\beta_0+\beta_1x+\varepsilon$ 是否显著，其中 ε 为随机误差，即考察由一组观测数据 $(x_i,\ y_i)$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，得到的回归方程 $\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x$ 是否有实际意义，则需要检验假设（　　）。

A. $H_0:\hat{\beta}_1=0$，$H_1:\hat{\beta}_1\neq0$　　B. $H_0:\hat{\beta}_0=0$，$H_1:\hat{\beta}_0\neq0$

C. $H_0:\beta_1=0$，$H_1:\beta_1\neq0$　　D. $H_0:\beta_0=0$，$H_1:\beta_0\neq0$

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. 设随机事件 A、B 互不相容，且 $P(A)=0.7$，$P(B)=0.3$，则 $P(AB)=$________。

12. 设随机事件 A、B 相互独立，且 $P(A)=0.9$，$P(B)=0.5$，则 $P(A|B)=$________。

13. 已知 10 件产品中有 1 件次品，从中任取 2 件，则未取到次品的概率为________。

14. 设随机变量的分布律为

X	1	2	3	4
P	a	0.1	$2a$	0.3

则常数 $a=$________。

15. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x & 0\leqslant x\leqslant1\\0 & 其他\end{cases}$，则当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时，X 的分布函数 $F(x)=$________。

16. 设随机变量 $X\sim N(0,\ 1)$，其分布函数为 $\Phi(x)$，则 $\Phi(0)=$________。

17. 设二维随机变量（X，Y）的分布律为

X \ Y	1	2	3
0	0.1	0.1	0.15
1	0.3	0.15	0.2

则 $P(X+Y=2)=$_______。

18. 设随机变量 X 的期望 $E(X)=2$，随机变量 Y 的期望 $E(Y)=4$，又 $E(XY)=0$，则 $\mathrm{Cov}(X，Y)=$_______。

19. 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $E(X^2)=$_______。

20. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(0，1)$，$Y\sim N(0，4)$，则 $D(X+2Y)=$______。

21. 设随机变量 $X\sim B(100，0.8)$，应用中心极限定理可算得 $P(76<X<84)\approx$_______。（附：$\Phi(1)=0.8413$）

22. 设总体 $X\sim N(0，16)$，$x_1，x_2，\ldots，x_{10}$ 为来自 X 的样本，$\bar{x}$ 为样本均值，则 $D(\bar{x})=$_______。

23. 设总体 X 服从均匀分布 $U(\theta，3\theta)$，$x_1，x_2，\ldots，x_{100}$ 是来自 X 的样本，$\bar{x}$ 为样本均值，则 θ 的矩估计 $\hat{\theta}=$_______。

24. 设总体 X 的概率密度含有未知参数 θ，且 $E(X)=4\theta$，$x_1，x_2，\ldots，x_n$ 为来自 X 的样本，$\bar{x}$ 为样本均值，若 $c\bar{x}$ 为 θ 的无偏估计，则常数 c=_______。

25. 设一元线性回归模型为 $y_i=\beta_0+\beta_1x_i+\varepsilon_i$，$i=1，2，\cdots，n$，$\varepsilon_i\sim N(0，\sigma^2)$，且各 ε_i 相互独立，则 $E(y_i)=$_______。

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. 设甲、乙、丙三个工厂生产同一种产品，由于各工厂规模与设备、技术的差异，三个工厂产品数量比例为 1∶2∶1，且产品次品率分别为 1%，2%，3%，求：

（1）从该产品中任取 1 件，其为次品的概率 p_1；

（2）在取出 1 件产品是次品的条件下，其为乙厂生产的概率 p_2。

27. 设随机变量 X 服从均匀分布 $U(0，2)$，Y 服从参数为 2 的指数分布，且 X 与 Y 相互独立，求：

（1）（X，Y）的概率密度 $f(x，y)$；

（2）$P(X\leqslant 1，Y\leqslant 2)$。

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. 已知某型号电子元件的寿命 X（单位：小时）具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{6000}{x^2} & x\geqslant 6000\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，一台仪器装有两个此型号的电子元件，其中任意一个损坏时仪器便不能正常工作。假设两个电子元件损坏与否相互独立。求：

（1）X 的分布函数；

（2）一个此型号电子元件工作超过 8000 小时的概率；

（3）一台仪器能正常工作 8000 小时以上的概率。

29. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2c & -1\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，求：

（1）常数 c；（2）$P(-0.5\leqslant X\leqslant 0.5)$（3）计算 $E\left(X^3\right)$。

五、应用题（10 分）

30.设某车间生产的零件长度 $X\sim N(\mu，\sigma^2)$（单位：mm），现从生产出的一批零件中随机抽取 25 件，测得零件长度的平均值 $\bar{x}=1970$，标准差 $s=100$，如果 σ^2 未知，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，能否认为该车间生产的零件的平均长度是 2020mm？（附：$t_{0.025}(24)=2.064$）

全国 2017 年 4 月高等教育自学考试概率论与数理统计（经管类）试题

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. 设 A，B 为随机事件，则事件“A，B 中至少有一个发生”是（　　）。

A. AB　　B. $A\overline{B}$　　C. $\overline{A\,B}$　　D. $A\cup B$

2. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\leqslant x<1\\ 1 & x\geqslant 1\end{cases}$，则 $P(0.2<X<0.3)=$（　　）。

A. 0.01　　B. 0.05　　C. 0.1　　D. 0.4

3. 设二维随机变量（X，Y）的概率密度为 $f(x，y)=\begin{cases}c & 0\leqslant x\leqslant 0.5,\ 0\leqslant y\leqslant 0.5,\\ 0 & 其他\end{cases}$，则常数 c=（　　）。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且二维随机变量（X，Y）的概率密度为 $f(x，y)=\begin{cases}4xy & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0 & 其他\end{cases}$，则当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f_X(x)=$（　　）。

A. $\frac{1}{2}x$　　B. x　　C. $2x$　　D. $4x$

5. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & 其他\end{cases}$，则 $E(X)=$（　　）。

A. 0　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 1

6. 设随机变量 $X\sim N(0，4)$，则 $D(X-1)=$（　　）。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7. 设(X,Y)为二维随机变量，且 $\mathrm{Cov}(X，Y)=-0.5$，$E(XY)=-0.3$，$E(X)=1$，则 $E(Y)=$（　　）。

A. -1　　B. 0　　C. 0.2　　D. 0.4

8. 设 x_1，x_2，…，x_n 为来自总体 X 的样本（$n>1$），且 $D(X)=\sigma^2$，则 σ^2 的无偏估计量为（　　）。

A. $\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$　　B. $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

C. $\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$　　D. $\dfrac{1}{n+2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

9. 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta} & 0<x<2\theta \\ 0 & \text{其他}\end{cases}(\theta>0)$，$x_1$，$x_2$，…，$x_n$ 为来自该总体的样本，$\bar{x}$ 为样本均值，则未知参数 θ 的无偏估计为（　　）。

A. $\dfrac{\bar{x}}{2}$　　B. $\dfrac{2}{3}\bar{x}$　　C. $\bar{x}$　　D. $\dfrac{1}{\bar{x}}$

10. 在一元线性回归的数学模型中，其正规方程组为 $\begin{cases}n\hat{\beta}_0+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\hat{\beta}_1=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\hat{\beta}_0+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)\hat{\beta}_1=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i\end{cases}$

已知 $\hat{\beta}_1$，则 $\hat{\beta}_0=$（　　）。

A. $\bar{x}$　　B. $\bar{y}$　　C. $\bar{y}-\hat{\beta}_1\bar{x}$　　D. $\bar{y}+\hat{\beta}_1\bar{x}$

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. 同时掷两枚均匀硬币，则都出现正面的概率为_______。

12. 设 A,B 为随机事件，$P(A)=0.5, P(B)=0.6$，$P(B|A)=0.8$，则 $P(A\cup B)=$_______。

13. 已知 10 件产品中有 2 件次品，从该产品中任意取 2 件，则恰好取到 2 件次品的概率为_______。

14. 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	1	2
P	$0.2c$	$0.4c$	c

则常数 $c=$_______。

15. 设随机变量 X 服从 $[0,\theta]$ 的泊松分布 $(\theta>0)$，则 X 在 $[0,\theta]$ 的概率密度为_______。

16. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且满足 $P(X=2)=P(X=3)$，则 $P(X=4)=$_______。

17. 设相互独立的随机变量 X，Y 分别服从参数 $\lambda_1=2$ 和 $\lambda_2=3$ 的指数分布，则当 $x>0$，$y>0$ 时，（X，Y）的概率密度 $f(x, y)=$______。

18. 设二维随机变量（X，Y）的分布律为

X \ Y	-1	0	2
-1	0.2	0.15	0.1
2	0.15	0.1	0.3

则 $P(X+Y=1)=$______。

19. 设随机变量 $X \sim B(20, 0.1)$，随机变量 Y 服从参数为 2 的泊松分布，且 X 与 Y 相互独立，则 $E(X+Y)=$______。

20. 设随机变量 $X \sim N(2, 4)$，且 $Y=3-2X$，则 $D(Y)=$______。

21. 已知 $D(X)=25$，$D(Y)=36$，X，Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0.4$，则 $D(X+Y)=$______。

22. 设总体 $X \sim N(1, 5)$，x_1，x_2，…，x_{20} 为来自总体 X 的样本，$\overline{x}=\dfrac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}x_i$，则 $E(\overline{x})=$______。

23. 设总体 X 服从参数为 λ 的指数分布 $(\lambda>0)$，x_1，x_2，…，x_n 为来自总体 X 的样本，其样本均值 $\overline{x}=3$，则 λ 的矩估计 $\hat{\lambda}=$______。

24. 设样本 x_1，x_2，…，x_n 来自总体 $N(\mu, 1)$，$\overline{x}$ 为样本均值，假设检验问题为 $H_0: \mu=\mu_0$，$H_1: \mu \neq \mu_0$，则检验统计量的表达式为______。

25. 已知某厂生产的零件直径服从 $N(\mu, 4)$，现随机抽取 16 个零件测其直径，并算得样本均值 $\overline{x}=21$，做假设检验 $H_0: \mu=20$，$H_1: \mu \neq 20$，则检验统计量的值为______。

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. 某厂甲、乙两台机床生产同一型号产品，产量分别占总产量的 40%，60%，并且各自产品中的次品率分别为 1%，2%。求：

（1）从该产品中任取一件是次品的概率；

（2）在取出一件是次品的条件下，它是由乙机床生产的概率。

27. 设随机变量 X 服从区间 [1, 2] 上的均匀分布，随机变量 Y 服从参数为 3 的指数分布，且 X，Y 相互独立，求：

（1）（X，Y）的边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（2）（X，Y）的概率密度 $f(x, y)$。

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} cx & 0<x<2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，令 $Y=X+1$，

求：（1）常数 c；（2）$P(0<X<1)$；（3）Y 的概率密度 $f_Y(y)$。

29. 已知二维随机变量(X，Y)的分布律为

X \ Y	0	1	2
1	0.1	0.2	0.1
2	0.1	0.1	0.3

求：（1）（X，Y）的边缘分布律；

（2）$P(X=2)$，$P(X-Y=1)$，$P(XY=0)$；

（3）$E(X+Y)$。

五、应用题（10 分）

30. 设某批零件的长度 $X\sim N(\mu，0.09)$，（单位：cm）现从这批零件中抽取 9 个，测其长度作为样本，并算得样本均值 $\overline{x}=43$，求 μ 的置信度为0.95的置信区间。（附：$\mu_{0.025}=1.96$）

第三部分　历年真题答案

全国 2012 年 1 月高等教育自学考试概率论与数理统计（经管类）试题答案

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. A	2. D	3. D	4. D	5.C
6. C	7. A	8. B	9. A	10. B

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. $\frac{1}{5}$　12. $\frac{3}{5}$　13. e^{-3}　14. $\frac{1}{2}$　15. 0.52

16. $\frac{1}{4}$　17. $\frac{1}{2}$　18. $\frac{7}{24}$　19. 3.5　20. 23

21. $\frac{1}{4}$　22. $N(n\lambda,\ n\lambda)$　23. 1　24. $\chi^2=(n-1)s^2$

25. $y=-250+3x$

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. **【解】**（1）由条件，明年总降雨量为 400～600mm 的概率为

$$P(400\leqslant X\leqslant 600)=P\left(\frac{400-500}{100}\leqslant\frac{X-500}{100}\leqslant\frac{600-500}{100}\right)$$

$$=\varPhi(1)-\varPhi(-1)=2\varPhi(1)-1=0.6826$$

（2）设该值为 a，则有 $P(X<a)=0.1$，即

$$P(X<a)=\varPhi\left(\frac{a-500}{100}\right)=0.1$$

由 $\varPhi\left(\frac{a-500}{100}\right)=0.1<0.5$，$\frac{a-500}{100}<0$

从而 $\varPhi\left(-\frac{a-500}{100}\right)=0.9\approx\varPhi(1.28)$

$\frac{a-500}{100}\approx-1.28$，$a\approx 372$

27. **【解】**在方差已知，μ 的置信度为 α 的置信区间为

$$\left[\overline{x}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

代入$\alpha=0.05$，$\overline{x}=21.6$，$\sigma=0.9$，$n=9$，$u_{0.025}=1.96$

$$\left[21.6-1.96\times\frac{0.9}{3},\ 21.6+1.96\times\frac{0.9}{3}\right]=[21.012,\ 22.188]$$

即所求μ的置信度为0.95的置信区间为$[21.012,\ 22.188]$

四、综合题（本大题共2小题，每小题12分，共24分）

28. **【解】**（1）设A表示“高速客车”，B表示“需要停驶检修”，

则由题意得

$$P(A)=0.2,\quad P(\overline{A})=0.8,\quad P(B|A)=0.002,\quad P(B|\overline{A})=0.01,$$

由全概率公式得

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$$

$$=0.2\times0.002+0.8\times0.01=0.0084$$

（2）由贝叶斯公式得

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{0.2\times0.002}{0.0084}=\frac{1}{21}$$

29. **【解】**（1）由概率密度的性质知，有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 ax\mathrm{d}x+\int_2^4(cx+b)\mathrm{d}x=2a+6c+2b$$

又因为

$$2=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 x\cdot ax\mathrm{d}x+\int_2^4 x(cx+b)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}a+\frac{56}{3}c+6b\quad 而$$

$$\frac{3}{4}=P(1<X<3)=\int_1^2 ax\mathrm{d}x+\int_2^3(cx+b)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}a+\frac{5}{2}c+b$$

联立方程组，解得$a=\frac{1}{4}$，$b=1$，$c=-\frac{1}{4}$

（2）由期望的定义，得

$$E(\mathrm{e}^X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\mathrm{e}^x\cdot\frac{x}{4}\mathrm{d}x+\int_2^4\mathrm{e}^x\left(1-\frac{x}{4}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{e}^4-\frac{1}{2}\mathrm{e}^2+\frac{1}{4}$$

五、应用题（本大题共1小题，10分）

30. **【解】**依题意，做单侧检验：

提出假设：$H_0:\mu=\mu_0=15\quad H_1:\mu>\mu_0=15$

选取统计量：$t=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

在显著水平$\alpha=0.01$下，拒绝域为$(2.4049，+\infty)$

经计算得

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{15.8-15}{0.5/\sqrt{50}}=11.27>2.4049$$

故拒绝H_0，即认为新的原材料确实提高了绳子所能承受的最大拉力。

全国 2012 年 4 月高等教育自学考试概率论与数理统计（经管类）试题答案

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. C	2. B	3. B	4. C	5. D
6. D	7. B	8. A	9. C	10. D

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. $\frac{1}{15}$	12. 0.4	13. 0.64	14. $\frac{16}{25}$
15. 0.7	16. 0.25	17. 0.4	18. $\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)^2$
19. 0	20. 0.2	21. 0.25	22. 0.6
23. 3	24. $\widehat{\mu}_1$	25. 0.99	

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. **【解】**（1）由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 cx^2\mathrm{d}x=\frac{c}{3}$，得 $c=3$

（2）X 的分布函数：$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & x<0\\ x^3 & 0\leqslant x<1\\ 1 & x\geqslant 1\end{cases}$

（3）$P\left\{0<x<\frac{1}{2}\right\}=F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=\frac{1}{8}$

27. **【解】**（1）$(X，Y)$关于 X 的边缘分布律为

X	0	1
P	0.6	0.4

（2）$X+Y$ 的可能取值为 -1，0，1，2

$$P(X+Y=-1)=P(X=0,Y=-1)=0.2$$

$$P(X+Y=0)=P(X=0,\ Y=0)+P(X=1,\ Y=-1)=0.2$$

$$P(X+Y=1)=P(X=0,\ Y=1)+P(X=1,\ Y=0)=0.5$$

$$P(X+Y=2)=P(X=1,\ Y=1)=0.1$$

因此，$X+Y$ 的分布律为

$X+Y$	-1	0	1	2
P	0.2	0.2	0.5	0.1

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. **【解】**（1）$E(\xi)=E(X)+E(Y)=0$

$$E(\eta)=E(X)-E(Y)=0$$

$$D(\xi)=D(X)+D(Y)=2$$

$$D(\eta)=D(X)+D(Y)=2$$

（2）$E(\xi\eta)=E\left[(X+Y)(X-Y)\right]=E\left(X^2\right)-E\left(Y^2\right)=0$

则　$\operatorname{Cov}(\xi,\ \eta)=E(\xi\eta)-E(\xi)E(\eta)=0$

故　$\rho_{\xi\eta}=\dfrac{\operatorname{Cov}(\xi,\ \eta)}{\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}}=0$

29. **【解】**（1）总体期望为

$$E(X)=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}\mathrm{d}x=\frac{\theta+1}{\theta+2}$$

令　$\dfrac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{x}$

解得 θ 的矩估计：$\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{x}-1}{1-\overline{x}}$

（2）似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta}=(\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta}$$

取对数：

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

求导数：

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

解得 θ 的极大似然估计：

$$\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$$

五、应用题（本大题共 1 小题，10 分）

30. **【解】**（1）设 B_i 表示事件“抽到的第 i 件产品为 B 类品”，$i=1$，2

则 $p_1=P(B_1B_2)=P(B_1)P(B_2)=0.05\times0.05=0.0025$

（2）设 A_i 表示事件“抽到的第 i 件产品为 A 类品”，$i=1$，2

则
$$\begin{aligned}p_2&=P(A_1A_2\cup A_1B_2\cup B_1A_2)\\&=P(A_1A_2)+P(A_1B_2)+P(B_1A_2)\\&=P(A_1)P(A_2)+P(A_1)P(B_2)+P(B_1)P(A_2)\\&=0.9^2+0.9\times0.05+0.05\times0.9=0.9\end{aligned}$$

全国 2012 年 10 月高等教育自学考试概率论与数理统计（经管类）试题答案

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. B	2. C	3. D	4. A	5. B
6. C	7. D	8. A	9. B	10. C

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. 0.4	12. $\frac{7}{12}$	13. 0.8	14. 0.1
15. 0.6826	16. 6	17. 0.4	18. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$
19. $\frac{16}{3}$	20. 2	21. 1	22. $\frac{\lambda}{n}$
23. $\frac{\overline{x}}{20}$	24. $\frac{u_{0.02}}{2}$	25. $\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$	

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. **【解】**（1）设 A 表示“取到第一台车床加工的零件”，B 表示“取到合格品”，则由题意得

$$P(A)=\frac{2}{3},\quad P(B|A)=0.97,\quad P\left(B|\overline{A}\right)=0.94$$

由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A)P(B|A)+P\left(\overline{A}\right)P\left(B|\overline{A}\right)\\&=\frac{2}{3}\times0.97+\frac{1}{3}\times0.94=0.96\end{aligned}$$

（2）由贝叶斯公式得

$$P\left(\overline{A}|\overline{B}\right)=\frac{P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}|\overline{A}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\frac{\frac{1}{3}\times0.06}{0.04}=0.5$$

27. **【解】**（1）

X	0	1
P	0.6	0.4

Y	-1	0	1
P	0.4	0.5	0.1

（2） $E(X)=0.4$， $E(Y)=-0.3$

$$\mathrm{Cov}(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-0.1+0.12=0.02$$

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. **【解】**设 X 为考生的数学成绩，则 $X \sim N(75, \sigma^2)$，其中 σ 未知，由题设条件知，

$$P(X>85)=1-\Phi\left(\frac{85-75}{\sigma}\right)=0.05,$$

即 $$\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)=0.95$$

故所求概率为

$$P(65<X<85)=2\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)-1=0.9$$

29. **【解】**（1）X 的边缘概率密度：

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

Y 的边缘概率密度：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y} & y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

（2）（X，Y）的概率密度：

$$f(x, y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y} & 0\leqslant x\leqslant 1,\ y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

（3）$P(X>Y)=\iint\limits_{x>y} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-1}$

五、应用题（10 分）

30. **【解】**依题意，做双侧检验：

提出假设：

$$H_0: \mu=\mu_0=500,\ H_1: \mu\neq\mu_0=500$$

选取统计量：

$$u=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0, 1)$$

在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下，拒绝域为

$$(-\infty, -1.96) \cup (1.96, +\infty)$$

经计算得

$$u = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{502 - 500}{2/3} = 3 > 1.96$$

故拒绝 H_0，即可以认为这天包装机工作不正常。

全国 2013 年 1 月高等教育自学考试概率论与数理统计（经管类）试题答案

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. C	2. B	3. C	4. A	5. D
6. D	7. A	8. C	9. B	10. D

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. 0.3456　12. 0.06　13. $\frac{3}{8}$　14. 6　15. 0.51

16. 0.6　17. 1　18. 0.4　19. 4　20. 10

21. $\frac{1}{4}$　22. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$　23. $[9.94, 12.66]$

24. $\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$　25. 4

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. 【解】设 A 表示“恰有一次击中目标”， B_i 表示“第 i 次击中目标”， $i=1，2，3$

依题意得

$$P\left(B_1\right)=0.4，\quad P\left(B_2\right)=0.5，\quad P\left(B_3\right)=0.7，$$

且 $$A=B_1\overline{B}_2\overline{B}_3\cup\overline{B}_1B_2\overline{B}_3\cup\overline{B}_1\overline{B}_2B_3$$

则由互不相容性和独立性得

$$P(A)=P\left(B_1\overline{B}_2\overline{B}_3\right)+P\left(\overline{B}_1B_2\overline{B}_3\right)+P\left(\overline{B}_1\overline{B}_2B_3\right)$$
$$=P\left(B_1\right)P\left(\overline{B}_2\right)P\left(\overline{B}_3\right)+P\left(\overline{B}_1\right)P\left(B_2\right)P\left(\overline{B}_3\right)+$$
$$P\left(\overline{B}_1\right)P\left(\overline{B}_2\right)P\left(B_3\right)$$

$$=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7$$

$$=0.36$$

27. 【解】 $$P\left(X=1，Y=1\right)=\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{4}$$

$$P\left(X=1，Y=2\right)=P\left(X=1，Y=3\right)=P\left(X=1，Y=4\right)=0$$

$$P(X=2, Y=1)=P(X=2, Y=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$P(X=2, Y=3)=P(X=2, Y=4)=0$$

$$P(X=3, Y=4)=0$$

$$P(X=3, Y=1)=P(X=3, Y=2)=P(X=3, Y=3)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

$$P(X=4, Y=1)=P(X=4, Y=2)=P(X=4, Y=3)=$$

$$P(X=4, Y=4)=\frac{1}{16}$$

综上所述，$X-Y$ 的分布律为

$X-Y$	0	1	2	3
P	25 / 48	13 / 48	7 / 48	1/16

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. **【解】**（1）由于 $F(x)$ 在 $x=2$ 连续取左右极限得 $A=\frac{1}{2}$

（2）由分布函数知，

当 $x<0$ 或 $x>2$ 时，$f(x)=F'(x)=0$；

当 $0<x<1$ 时，$f(x)=F'(x)=x$；

当 $1<x<2$ 时，$f(x)=F'(x)=\frac{1}{2}$；

因此，x 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} x & 0\leqslant x<1 \\ \frac{1}{2} & 1\leqslant x<2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

（3）$P\left(0<X\leqslant\frac{3}{2}\right)=F\left(\frac{3}{2}\right)-F(0)=\frac{3}{4}$

29. **【解】**首先计算各自的射击水平，为此求出 $E(X)$，$E(Y)$

$$E(X)=8\times0.4+9\times0.2+10\times0.4=9$$

$$E(Y)=8\times0.1+9\times0.8+10\times0.1=9$$

从平均成绩上看，甲乙两射手的射击水平相当。

为此，再计算方差 $D(X)$，$D(Y)$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=0.8$$

$$D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=0.2$$

很明显，乙射手的方差明显地小于甲射手的方差，所以从稳定性上来看，乙射手的射击水平更稳定，所以可选乙射手参加比赛。

五、应用题（10 分）

30. **【解】**（1）依题意，做双侧检验：

提出假设：

$$H_0: \mu=\mu_0=70，H_1: \mu\neq\mu_0=70$$

选取统计量：

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，拒绝域为

$$(-\infty，-2.064)\cup(2.064，+\infty)$$

经计算得

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{66.4-70}{\frac{15}{5}}=1.2<2.064$$

故接受 H_0，即可以认为该镇居民日平均收入为 70 元。

（2）依题意，做双侧检验：

提出假设：

$$H_0: \sigma^2=\sigma_0^2=16^2；H_1: \sigma^2\neq\sigma_0^2=16^2$$

选取统计量：

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，拒绝域为

$$(0，12.4)\cup(39.4，+\infty)$$

经计算得

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}=\frac{(25-1)\times15^2}{16^2}=21.09<39.4$$

故接受 H_0，即可以认为该镇居民日收入的方差为16^2。

全国 2013 年 4 月高等教育自学考试概率论与数理统计（经管类）试题答案

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. D	2. A	3. D	4. D	5. A
6. B	7. C	8. C	9. A	10. B

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. 0.1	12. $\frac{1}{5}$	13. 0.8	14. $1-\mathrm{e}^{-1}$
15. $\frac{1}{27}$	16. $\frac{1}{\pi}$	17. 0	18. $\frac{1}{3}$
19. $\frac{1}{4}$	20. $\frac{1}{4}$	21. $(n-1)\sigma^2$	22. $\overline{x}$　$\overline{x}$
23. $\lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$	24. $\chi^2(n-1)$	25. $\frac{\sigma^2}{n}$	

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. **【解】**设 A 表示“甲取到黑球”，B 表示“乙取到的都是黑球”，则由题意得

（1）$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

（2）由全概率公式得

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$$

$$=\frac{2}{5}\times\frac{C_3^2}{C_9^2}+\frac{3}{5}\times\frac{C_4^2}{C_9^2}=\frac{2}{15}$$

27. **【解】**依题意，做双侧检验：

提出假设：

$$H_0:\mu=\mu_0=12;\ H_1:\mu\neq\mu_0=12$$

选取统计量：

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，拒绝域为

$$(-\infty,\ -2.1315)\cup(-2.1315,\ +\infty)$$

经计算得

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{11.5-12}{\frac{0.8}{4}}=-2.5<-2.1315$$

故拒绝 H_0，即用新工艺生产的零件平均直径与以往有显著差异。

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. **【解】**（1）X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^{+\infty}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}\mathrm{d}y & x>0\\ 0 & 其他\end{cases}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x} & x>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^{+\infty}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}\mathrm{d}x & y>0\\ 0 & 其他\end{cases}=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2y} & y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

（2）Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(2X+1\leqslant z)=P\left(X\leqslant\frac{z-1}{2}\right)=F_X\left(\frac{z-1}{2}\right)$$

Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=F_X{}'\left(\frac{z-1}{2}\right)=f_X\left(\frac{z-1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{z-1}{2}} & z>1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

29. **【解】**（1）$E(Z)=E(2X+Y)=2E(X)+E(Y)=1$

$$D(Z)=D(2X+Y)=4D(X)+D(Y)=16$$

（2）$E(XZ)=E\left[X(2X+Y)\right]=2E\left(X^2\right)+E(X)E(Y)$

$$=2\left[D(X)+\left(E(X)\right)^2\right]+E(X)E(Y)=6$$

（3）$\rho_{XZ}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}}=\dfrac{E(XZ)-E(X)E(Z)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}}=\dfrac{6}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

五、应用题（10 分）

30. **【解】**（1）$P(X\geqslant 60)=1-\Phi\left(\dfrac{60-75}{15}\right)=1-\Phi(-1)=\Phi(1)=0.8413$

$P(X \geqslant 90) = 1 - \Phi\left(\frac{90-75}{15}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

（2）考试成绩至少高于 x 分使得

$$P(X \geqslant x) \leqslant 50\%，1 - \Phi\left(\frac{x-75}{15}\right) \leqslant 0.5$$

即 $\Phi\left(\frac{x-75}{15}\right) \geqslant \Phi(0)$，所以 $x \geqslant 75$

全国 2013 年 10 月高等教育自学考试概率论与数理统计（经管类）试题答案

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. D　　2. D　　3. A　　4. A　　5.B

6. B　　7. A　　8. C　　9. B　　10. C

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. 0.4　　12. 0.56　　13. e^{-1}　　14. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$，$-\infty<y<+\infty$

15. 1　　16. $\frac{1}{2}e^{-2}$　　17. 1　　18. 1

19. $n\sigma^2$　　20. 0.5　　21. $\chi^2(3)$　　22. α

23. $\hat{\mu}_2$　　24. $\sqrt{n}\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma_0}$　　25. $\overline{y}-\frac{L_{xy}}{L_{xx}}\overline{x}$

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. **【解】**（1）X 的边缘概率密度：

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^2\frac{1}{6}dy & 0<x<3\\ 0 & 其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{3} & 0<x<3\\ 0 & 其他\end{cases}$$

Y 的边缘概率密度：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^3\frac{1}{6}dx & 0<y<2\\ 0 & 其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0<y<2\\ 0 & 其他\end{cases}$$

（2）$P\{X+Y\leqslant 2\}=\iint\limits_{x+y\leqslant 2}f(x,y)dxdy=\int_0^2dx\int_0^{2-x}\frac{1}{6}dy$

$$=\int_0^2\frac{1}{6}(2-x)dx=\frac{1}{3}$$

27. **【解】**σ^2 的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$$

代入$\alpha=0.02$，$\chi^2{}_{0.01}(19)=36.191$，$\chi^2{}_{0.99}(19)=7.633$

$$\left[\frac{19\times4^2}{36.191},\ \frac{19\times4^2}{7.633}\right]=[8.400,\ 39.827]$$

所以正态分布方差σ^2的置信度为98%的置信区间为$[8.400,\ 39.827]$

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. **【解】**（1）设A表示“患病”，B表示“阳性”，

则由题意得

$$P(A)=20\%,\quad P(\overline{A})=80\%,\quad P(B|\overline{A})=5\%$$

由全概率公式得

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$$
$$=20\%\times1+80\%\times5\%=0.24$$

（2）由贝叶斯公式得

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{20\%\times1}{0.24}=\frac{5}{6}\approx0.833$$

29. **【解】**（1）$1=\int_0^4 cx\mathrm{d}x=\frac{c}{2}x^2\Big|_0^4=8c$，所以$c=\frac{1}{8}$

（2）当$0<x<4$时，$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_0^x\frac{1}{8}x\mathrm{d}x=\frac{1}{16}x^2$

因此，X的分布函数：

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant0\\ \frac{1}{16}x^2 & 0<x<4\\ 1 & x\geqslant4\end{cases}$$

（3）$P(|X|\leqslant2)=P(-2\leqslant X\leqslant2)=\int_0^2\frac{1}{8}x\mathrm{d}x=\frac{1}{16}x^2\Big|_0^2=\frac{1}{4}$

五、应用题（10 分）

30. **【解】**（1）设理赔保单数为X，由题意，$X\sim B(800,\ 0.04)$

X的分布律为

$$P(X=k)=C_{800}^k\cdot0.04^k\cdot0.96^{800-k},\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ 800$$

（2）令 Y 为保险公司在该险种上获得的利润，则 $Y = 600\times 800-10000X$

期望利润为

$$E(Y)=E(600\times 800-10000X)=600\times 800-10000E(X)$$
$$=600\times 800-10000\times 800\times 0.04=160000$$

全国 2014 年 4 月高等教育自学考试概率论与数理统计（经管类）试题答案

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. B	2. C	3. A	4. D	5. A
6. A	7. B	8. C	9. D	10. C

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. $\frac{1}{6}$	12. 0.18	13. 1	14. $\frac{x-1}{4}$
15. $\frac{3}{4}$	16. 4	17. 0.2	18. $N(1,\ 2)$
19. $\frac{1}{2}$	20. 5	21. 0.4938	22. $\chi^2(4)$
23. $\frac{7}{5}$	24. 0.9	25. 0.1	

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. **【解】**（1）X 的边缘概率密度：

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^1 6x^2y\mathrm{d}y & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}3x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

（2）$P\{X>Y\}=\iint\limits_{x>y} f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 6x^2y\mathrm{d}y=\int_0^1 3x^4\mathrm{d}x=\frac{3}{5}$

27. **【解】**（1）$E(Y)=0\times(0.1+0.2)+1\times(0.1+0.1)+2\times(0.2+0.3)=1.2$

$E(X)=0\times(0.1+0.1+0.2)+1\times(0.2+0.1+0.3)=0.6$

$E(X^2)=0^2\times(0.1+0.1+0.2)+1^2\times(0.2+0.1+0.3)=0.6$

$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=0.24$

（2）$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=1.8$

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. **【解】**（1）设 A 表示“甲盒中任取 1 个白球”，B 表示“乙盒中任取 2 个黑球”，

则由题意得

$$P(A)=\frac{4}{5},\quad P(B|A)=\frac{1}{C_6^2}=\frac{1}{15},\quad P(B|\overline{A})=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$$

由全概率公式得

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$$
$$=\frac{4}{5}\times\frac{1}{15}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{7}{75}$$

（2）由贝叶斯公式得

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{15}}{\frac{7}{75}}=\frac{8}{14}$$

29. 【解】（1）$P\{X<-1\}=\Phi(-1)=1-\Phi(1)=1-0.8413=0.1587$

（2）$P\{|X|<1\}=P\{-1<X<1\}=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=\ 2\times0.8413-1=0.6826$

（3）$\because X\sim N(0，1)$，$\therefore Y=2X\sim N(0，4)$

Y 的概率密度为

$$f(y)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}，-\infty<y<+\infty$$

五、应用题（10 分）

30. 【解】依题意，做双侧检验：

提出假设：

$$H_0:\sigma^2=2，H_1:\sigma^2\neq2$$

选取统计量：

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

在显著性水平 $\alpha=0.05$，拒绝域为

$W=\left(0，\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)\cup\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)，+\infty\right)=(0，3.2)\cup(20.5，+\infty)$经计算得

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}=\frac{10\times3}{2}=15\notin W$$

故接受 H_0，即认为该项指标的方差仍为 2。

全国 2014 年 10 月高等教育自学考试概率论与数理统计（经管类）试题答案

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. B	2. C	3. A	4. D	5. B
6. D	7. D	8. B	9. A	10. C

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. 0.6　　12. 0.2　　13. 0.792　　14. 1

15. 2　　16. 0.4　　17. $3\mathrm{e}^{-(x+3y)}$　　18. $N(2,17)$

19. $\dfrac{9}{4}$　　20. 17　　21. 0.9525　　22. $\chi^2(n)$

23. $\dfrac{\overline{x}}{1-\overline{x}}$　　24. $\left[\overline{x}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{x}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right]$　　25. $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. **【解】**同一时刻出现故障的机器数为 X，则 $X\sim B(3,0.1)$

所求概率为 $P(X\geqslant 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-0.9^3=0.271$

27. **【解】**（1）$E(X)=1\times\left(\dfrac{3}{8}+\dfrac{3}{8}\right)+3\times\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{3}{2}$

$$E(Y)=1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$$

$$E(XY)=1\times1\times\frac{3}{8}+1\times2\times\frac{3}{8}+3\times3\times\frac{1}{8}=\frac{9}{4}$$

（2）X 的分布律为

X	1	3
P	3/4	1/4

Y 的分布律为

Y	0	1	2	3
P	1/8	3/8	3/8	1/8

因为 $P(X=1, Y=0)=0 \neq P(X=1)\cdot P(Y=0)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{8}=\frac{3}{32}$

所以 X 与 Y 不相互独立。

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. **【解】**（1）因为 $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=0.24$，所以 $a=2$。

（2）X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1 & x>1\end{cases}$

（3）$P\left(|X|\leqslant\frac{1}{2}\right)=P\left(-\frac{1}{2}\leqslant X\leqslant\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$

29. **【解】**（1）X 的边缘概率密度：

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^{+\infty}6\mathrm{e}^{-(2x+3y)}\mathrm{d}y & x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x} & x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

Y 的边缘概率密度：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^{+\infty}6\mathrm{e}^{-(2x+3y)}\mathrm{d}x & y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}3\mathrm{e}^{-3y} & y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

（2）因为 $f_X(x)\cdot f_Y(y)=f(x, y)$，所以 X 与 Y 独立。

（3）$P\{X<1, Y<2\}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^2 6\mathrm{e}^{-(2x+3y)}\mathrm{d}y=\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-3}\right)$

五、应用题（10 分）

30. **【解】**提出假设：

$$H_0: \mu=\mu_0=340, H_1: \mu\neq\mu_0=340$$

选取统计量：

$$u=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0, 1)$$

在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，拒绝域为

$$(-\infty, -1.96)\cup(1.96, +\infty)$$

经计算得

$$u=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{340.5-340}{5/10}=1<1.96$$

故接受 H_0，即可以认为该地区居民平均周消费额是 340 元。

全国 2015 年 4 月高等教育自学考试概率论与数理统计（经管类）试题答案

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. A	2. A	3. B	4. D	5. D
6. C	7. C	8. C	9. B	10. B

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. 0.15　　12. 0.78　　13.0.973　　14. 0.6

15. $F(x)=\begin{cases}0 & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\leqslant x<b \\ 1 & x\geqslant b\end{cases}$　　16. $\dfrac{2}{15}$

17. $\begin{cases}\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-y} & -2<x<2，y>0 \\ 0 & 其他\end{cases}$　　18. 5

19. 2　　20. $1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$　　21. $N(0，1)$

22. $\overline{x}$　　23. α　　24. $\dfrac{\overline{x}-1}{s/\sqrt{n}}$　　25. $\beta_0+\beta_1 x$

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. **【解】**设 A 表示第一次取到红球，B 表示第二次取到红球，

则由题意得

$$P(A)=\frac{2}{6}，\quad P(\overline{A})=\frac{4}{6}，\quad P(B|A)=\frac{1}{5}，\quad P(B|\overline{A})=\frac{2}{5}$$

由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})\\&=\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}+\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

即第二次取到红球的概率是 $\dfrac{1}{3}$

27. 【解】（1）$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\0 & x\leqslant 0\end{cases}$

$f(3)=2e^{-2\times 3}=2e^{-6}$

（2）$P\{X>3\}=\int_3^{+\infty}2e^{-2x}dx=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\Big|_3^{+\infty}=e^{-6}$

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. 【解】（1）X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\0 & \text{其他}\end{cases}$$

（2）因为 X 与 Y 相互独立，所以有

$$f(x,\ y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & 0\leqslant x\leqslant 1,\ y>0\\0 & \text{其他}\end{cases}$$

（3）$P\{X+Y\leqslant 1\}=\iint\limits_{X+Y\leqslant 1}f(x,\ y)dxdy$

$$=\int_0^1dx\int_0^{1-x}e^{-y}dy=-\int_0^1(e^{x-1}-1)\ dx=e^{-1}$$

29. 【解】（1）$E(X)=\sum_{i=1}^{2}iP(X=i)=-1\times 0.5+1\times 0.5=0$

$$E(Y)=\sum_{j=1}^{2}jP(Y=j)=-1\times 0.5+1\times 0.5=0$$

$$E(XY)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}ijP(X=i,\ \ Y=j)=-1\times 0.5+1\times 0.5=0$$

（2）$D(X)=E(X^2)-E(X)^2$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{2}i^2P(X=i)=1\times 0.5+1\times 0.5=1$$

$$E(Y^2)=\sum_{j=1}^{2}j^2P(Y=j)=1\times 0.5+1\times 0.5=1$$

$$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=1$$

$$D(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=1$$

（3）$\mathrm{Cov}(X,\ Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,\ Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$$

五、应用题（10 分）

30. 【解】由题知 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$[\overline{x}-\frac{u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}，\overline{x}+\frac{u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}]$$

即

$$[40-\frac{1.96}{\sqrt{16}}，40+\frac{1.96}{\sqrt{16}}]=[39.51，40.49]$$

全国 2015 年 10 月高等教育自学考试概率论与数理统计（经管类）试题答案

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. D　　2. A　　3. D　　4. B　　5. D

6.C　　7. C　　8. D　　9. B　　10. B

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. $\frac{1}{25}$　　12. $A\cup B$　　13. 0.42

14. 0.1　　15. 1　　16. $\frac{4}{25}$　　17. $F(0,\ 0)$

18. $f(x,\ y)=\begin{cases}\frac{1}{6} & -1\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$　　19. $\frac{5}{2}$

20. $\frac{4}{5}$　　21. $\frac{1}{2}$　　22. $\frac{32}{3}$　　23. $\varPhi(2)$　　24. $t(10)$　　25. $\frac{\sigma^2}{n}$

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. **【解】**设 A 表示从甲袋中取出白球，B 表示从乙袋中取出白球，则由题意得

$$P(A)=\frac{3}{5},\quad P(\bar{A})=\frac{2}{5},\quad P(B|A)=\frac{2}{4}\ P(B|\bar{A})=\frac{1}{4}$$

由全概率公式得

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})$$
$$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{5}$$

即该球是白球的概率是 $\frac{2}{5}$。

27. **【解】**（1）因为 X 服从区间 $[1,\ \theta]$ 上的均匀分布，所以 $\frac{1+\theta}{2}=\bar{x}$

由矩估计法：

$$E(X)=\frac{1+\theta}{2}$$

所以 $\hat{\theta}=2\overline{x}-1$

（2） $E(\hat{\theta})=E(2\overline{x}-1)=2E(\overline{x})-1=2\times\frac{1+\theta}{2}-1=\theta$

所以 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计.

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. **【解】**（1）由题意知：随机变量 X 的可能取值为 0，1，2，其取值概率各为

$$P(X=0)=\frac{28}{45}，P(X=1)=\frac{16}{45}，P(X=2)=\frac{1}{45}$$

因此 X 的分布律为

X	0	1	2
P	28/45	16/45	1/45

（2）X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{28}{45} & 0\leqslant x<1\\ \frac{44}{45} & 1\leqslant x<2\\ 1 & x\geqslant 2\end{cases}$$

（3） $P\{0<X\leqslant 2\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}=\frac{17}{45}$

29. **【解】**（1）由题求得：

$$E(X)=-2，D(X)=4，E(Y)=-1，D(Y)=\frac{1}{3}$$

$$E[(XY)^2]=E(X^2)E(Y^2)=[D(X)+[E(X)]^2][D(Y)+[E(Y)]^2]=\frac{32}{3}$$

（2） $\mathrm{Cov}(2X，Y)=2\mathrm{Cov}(X，Y)=2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

五、应用题（10 分）

30. **【解】**提出假设：

$$H_0:\mu=\mu_0=70，H_1:\mu\neq\mu_0=70$$

选取统计量：

$$u=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，拒绝域为

$$(-\infty,-1.96)\cup(1.96,+\infty)$$

经计算得

$$u=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{68.95-70}{4/\sqrt{16}}=-0.105>-1.96$$

故接受 H_0，即可以认为全体考生的平均成绩是 70 分。

全国 2016 年 4 月高等教育自学考试概率论与数理统计（经管类）试题答案

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. B	2. B	3. D	4. A	5. D
6. D	7. A	8. C	9. B	10. A

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. 1	12. 0.2	13. $\frac{1}{4}$	14. 0.064
15. $2x$	16. $\frac{1}{4}$	17. 0.6826	18. $\frac{1}{2}$
19. 12	20. 7.2	21. $\frac{13}{36}$	22. 1
23. 16	24. $\left[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right]$	25. $2\bar{x}$	

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. **【解】**设 A_i 表示“售出 2 件产品中含一等品 i 件”，i=0，1，2，

B 表示“任取一件为一等品”，

则由题意得

$$P(A_0)=\frac{1}{C_{10}^2}=\frac{1}{45},\ P(A_1)=\frac{C_8^1C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{16}{45},\ P(A_2)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}$$

$$P(B|A_0)=1,\ P(B|A_1)=\frac{7}{8},\ P(B|A_2)=\frac{3}{4}$$

由全概率公式得

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B|A_i)$$
$$=\frac{1}{45}\times1+\frac{16}{45}\times\frac{7}{8}+\frac{28}{45}\times\frac{3}{4}=\frac{4}{5}$$

27. **【解】**X 的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x} & x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

又 $y=3x+1$ 单调、可导，反函数 $x=\frac{1}{3}(y-1)=h(y)$， $h'(y)=\frac{1}{3}$

由公式法得

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))|h'(y)| & \frac{1}{3}(y-1)>0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}(y-1)} & y>1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. **【解】**（1）X 的边缘概率密度：

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases} \int_5^{+\infty} 2xe^{-(y-5)}\mathrm{d}y & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}=\begin{cases} 2x & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$ Y 的边缘概率密度：

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases} \int_0^1 2xe^{-(y-5)}\mathrm{d}x & y>5 \\ 0 & 其他 \end{cases}=\begin{cases} e^{-(y-5)} & y>5 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

（2）因为 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以 X，Y 相互独立.

（3）$E(X)=\int_0^1 x\cdot 2x\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^2\Big|_0^1=\frac{2}{3}$

29. **【解】**（1）因为 $P(Y=0)=0.4$ 所以 $0.1+b=0.4$，$b=0.3$

因为 $a+0.1+0.2+0.1+b+0.2=1$ 所以 $a=0.1$

（2）$E(X)=1\times(0.1+0.3+0.2)=0.6$

$$E(X^2)=1^2\times(0.1+0.3+0.2)=0.6$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=0.24$$

（3）$E(XY)=1\times(-1)\times 0.1+1\times 1\times 0.2=0.1$

五、应用题（10 分）

30. **【解】**由题意，要检验的假设为

$$H_0:\mu=50,\ H_1:\mu\neq 50$$

选取统计量：

$$t=\frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

当显著性水平 $\alpha=0.05$，检验的拒绝域为

$$W=\left(-\infty，-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)\cup\left(t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)，+\infty\right)$$
$$=(-\infty，-2.306)\cup(2.306，+\infty)$$

代入数值，

$$\bar{x}=49.9，\mu=50，s=0.3，n=9$$

计算得

$$t=\frac{49.9-50}{0.3/3}=-1\notin W$$

故接受 H_0，即当日水泥包装机工作正常。

全国 2016 年 10 月高等教育自学考试概率论与数理统计（经管类）试题答案

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. D	2. D	3. B	4. B	5. D
6.A	7. A	8. B	9. C	10. C

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. 0	12. 0.9	13. $\frac{4}{5}$	14. 0.2	15. x^2
16. 0.5	17. 0.4	18. -8	19. 2	20. 17
21. 0.6826	22. $\frac{8}{5}$	23. $\frac{\overline{x}}{2}$	24. $\frac{1}{4}$	25. 0

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. 【解】（1）设 A_1 表示“任取产品由甲厂生产”，A_2 表示“任取产品由乙厂生产”，A_3 表示“任取产品由丙厂生产”，B 表示“任取一件产品为次品”，

$$p_1=P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{1}{4}\times1\%+\frac{2}{4}\times2\%+\frac{1}{4}\times3\%=0.02$$

（2）$p_2=P(A_2|B)=\dfrac{P(A_2B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\dfrac{\frac{2}{4}\times2\%}{0.02}=\dfrac{1}{2}$

27. 【解】（1）$X\sim U(0,2)$，X 的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0<x<2\\ 0 & 其他\end{cases}$

$Y\sim E(2)$，Y 的概率密度 $f_Y(y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2y} & y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$

X，Y 相互独立，则 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-2y} & 0<x<2，y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$

（2）$P(X\leqslant1，Y\leqslant2)=P(X\leqslant1)\cdot P(Y\leqslant2)=\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-4}\right)$

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. 【解】（1）当 $x \geqslant 6000$ 时，X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{6000}^{x}\frac{6000}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{6000}{x}\Big|_{6000}^{x}=1-\frac{6000}{x}$$

所以

$$F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{6000}{x} & x\geqslant 6000\\ 0 & 其他\end{cases}$$

（2）$P(X>8000)=1-F(8000)=1-\left(1-\dfrac{6000}{8000}\right)=\dfrac{3}{4}$

（3）两个电子元件相互独立，$p=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{16}$

29. 【解】（1）$\int_{-1}^{1}2c\mathrm{d}x=2cx\Big|_{-1}^{1}=4c=1$，$c=\dfrac{1}{4}$

（2）$P(-0.5\leqslant X\leqslant 0.5)=\dfrac{0.5-(-0.5)}{1-(-1)}=\dfrac{1}{2}$

（3）$E\left(X^3\right)=\int_{-1}^{1}x^3\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x=0$

五、应用题（10 分）

30. 【解】提出假设：

$$H_0:\mu=\mu_0=2020，H_1:\mu\neq\mu_0=2020$$

选取统计量：

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，拒绝域为

$$W=(-\infty，-2.064)\cup(2.064，+\infty)$$

经计算得

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{1970-2020}{100/5}=-2.5\in W$$

故拒绝 H_0，不能认为该车间生产的零件的平均长度是 2020mm。

全国 2017 年 4 月高等教育自学考试概率论与数理统计（经管类）试题答案

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. D	2. B	3. D	4. C	5. C
6. D	7. C	8. A	9. A	10. C

二、填空题（本大题共 15 小题，每小题 2 分，共 30 分）

11. $\frac{1}{4}$	12. 0.7	13. $\frac{1}{45}$	14. $\frac{5}{8}$
15. $\frac{1}{\theta}$	16. $\frac{27}{8}\mathrm{e}^{-3}$	17. $6\mathrm{e}^{-(2x+3y)}$	18. 0.25
19. 4	20. 16	21. 85	22. 1
23. $\frac{1}{3}$	24. $\frac{\bar{X}-\mu_0}{1/\sqrt{n}} \sim N(0,\ 1)$	25. 2	

三、计算题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

26. **【解】**设 A_1 表示“甲厂生产”，A_2 表示“乙厂生产”，B 表示“任取一件为次品”，则由题意得

$$P(A_1)=0.4,\ P(A_2)=0.6,\quad P(B|A_1)=0.01,\ P(B|A_2)=0.02$$

（1）由全概率公式得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{2} P(A_i)P(B|A_i)=0.4\times0.01+0.6\times0.02=0.016$$

（2）由贝叶斯公式得

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{0.6\times0.02}{0.016}=\frac{3}{4}$$

27. **【解】**（1）X 服从区间[1，2]上的均匀分布，X 的边缘概率密度：

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

Y 服从参数为 3 的指数分布，Y 的边缘概率密度：

$$f_Y(y)=\begin{cases}3\mathrm{e}^{-3y} & y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

（2）X，Y 相互独立，所以 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}3\mathrm{e}^{-3y} & 1\leqslant x\leqslant 2,\ y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

28. **【解】**（1）$\int_0^2 cx\mathrm{d}x=c\dfrac{1}{2}x^2\Big|_0^2=2c=1$， $c=\dfrac{1}{2}$

（2）$P(0<X<1)=\int_0^1\dfrac{1}{2}x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}x^2\Big|_0^1=\dfrac{1}{4}$

（3）$y=x+1$ 单调、可导，反函数 $x=y-1=h(y)$，$h'(y)=1$

由公式法得

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(h(y))|h'(y)| & 0<y-1<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(y-1) & 1<y<3\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

29. **【解】**（1）关于 X 的边缘分布律为

X	1	2
P	0.4	0.6

关于 Y 的边缘分布律：

Y	0	1	2
P	0.3	0.3	0.4

（2）$P(X=2)=0.6$，　$P(X-Y=1)=0.1+0.1=0.2$，　$P(XY=0)=0.1+0.2=0.3$

（3）$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=1\times0.4+2\times0.6+1\times0.3+2\times0.4=2.7$

五、应用题（10 分）

30. **【解】**当 $\sigma^2=0.09$ 时，μ 的置信度 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right]$$

代入数值 $\bar{x}=43$，$\sigma=0.3$，$1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$\mu_{0.025}=1.96$

计算得 μ 的置信度 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$[42.864,\ 43.196]$$